**MATHS**

**08 Jan. 2020 [Morning]**

**JEE MAIN PAPER ONLINE**

**RED COLOUR IS ANSWER IN JEE-MAIN**

***Differential Calculus***

***Monotonocity***

**1.** If c is a pont at which Rolle's theorem holds for the function $f(x)=\log_e\left(\frac{x^2+\alpha}{7x}\right)$, in the interval [3, 4], where $\alpha \in R$, then f "(c) is equal to :

यदि c एक बिन्दु है जिस पर, अंतराल [3, 4] में, फलन $f(x)=\log_e\left(\frac{x^2+\alpha}{7x}\right)$ पर रोले प्रमेय लागू होता है, जहां $\alpha \in R$ है, तो f "(c) बराबर है :

(1) $-\frac{1}{24}$ (2) $-\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

Ans. 3

Question ID : 4050361527

Option 1 ID : 4050365570

Option 2 ID : 4050365571

Option 3 ID : **4050365569**

Option 4 ID : 4050365568

**Sol.** $f(3)=f(4)$

$$\log_e\frac{9+\alpha}{21}=\log\frac{16+\alpha}{28}$$

$$\frac{9+\alpha}{21}=\frac{16+\alpha}{28}$$

$$\alpha = 12$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x^2+12}{7x}}\times\frac{(2x)(7x)-7(x^2+12)}{(7x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-12}{x(x^2+12)}$$

$$f'(c)=0$$

$$\frac{c^2-12}{c(c^2+12)}=0$$

$c = \sqrt{2}$

$$f''(c) = \frac{(2x)(x^3+12x) - (x^2-12)(3x^2+12)}{(x^3+12x)^2}$$

$$f''(c) = \frac{1}{12}$$

***Algebra***

***Probability***

**2.** Let A and B be two independent events such that $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(B) = \frac{1}{6}$. Then, which of the following is True ?

माना A तथा B दो ऐसी स्वतंत्र घटनाएं हैं कि $P(A) = \frac{1}{3}$ तथा $P(B) = \frac{1}{6}$ हैं, तो निम्न में से कौनसा सत्य है ?

(1) $P(A'/B') = \frac{1}{3}$ (2) $P(A/B') = \frac{1}{3}$ (3) $P(A/B) = \frac{2}{3}$ (4) $P(A/(A \cup B)) = \frac{1}{4}$

Ans. 2

Question ID : 4050361536

Option 1 ID : 4050365607

Option 2 ID : **4050365606**

Option 3 ID : 4050365605

Option 4 ID : 4050365604

**Sol.** $P(A') = \frac{2}{3}$ $P(B') = \frac{5}{6}$

(1) $P(A'/B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A')P(B')}{P(B')} = \frac{2}{3}$

(2) $P(A/B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A)P(B')}{P(B')} = \frac{1}{3}$

(3) $P(A/B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$

(4) $P(A/A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)}$

***Vectors***

***Vectors***

**3.** Let the volume of a parallelopiped whose coterminous edges are given by $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{w} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ be 1 cu. unit. If $\theta$ be the angle between the edges $\vec{u}$ and $\vec{w}$, then $\cos\theta$ can be :

माना एक समान्तर षट्फलक, जिसके एक ही शीर्ष से होकर जाने वाले किनारे $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{w} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा प्रदत्त हैं, का आयतन 1 घन इकाई है। यदि किनारों $\vec{u}$ तथा $\vec{w}$ के बीच कोण $\theta$ है, तो $\cos\theta$ हो सकता है :

(1) $\frac{7}{6\sqrt{6}}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{5}{3\sqrt{3}}$ (4) $\frac{7}{6\sqrt{3}}$

Ans. 4

Question ID : 4050361534

Option 1 ID : 4050365597

Option 2 ID : 4050365596

Option 3 ID : 4050365599

Option 4 ID : **4050365598**

**Sol.** $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{Vmatrix}=1$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\pm 1$$

$\lambda = 2$ or $\lambda = 4$

for $\lambda = 2$

$$\cos\theta=\frac{2+1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{5}{6}$$

for $\lambda = 4$

$$\cos\theta=\frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{18}}=\frac{7}{6\sqrt{3}}$$

## *Coordinate Geometry*

### *Ellipse*

**4.** Let the line $y = mx$ and the ellipse $2x^2 + y^2 = 1$ intersect at a point P in the first quadrant. If the normal to this ellipse at P meets the co-ordinate axes at $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0\right)$ and $(0, \beta)$ then $\beta$ is equal to :

माना रेखा $y = mx$ तथा दीर्घवृत्त $2x^2 + y^2 = 1$, प्रथम चतुर्थांश में स्थित एक बिन्दु P पर काटते हैं। यदि इस दीर्घवृत्त का P पर अभिलम्ब, निर्देशांक अक्षों को क्रमशः $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0\right)$ तथा $(0, \beta)$ पर मिलता है, तो $\beta$ का मान है :

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Ans. 2

Question ID : 4050361532

Option 1 ID : 4050365589

Option 2 ID : **4050365588**

Option 3 ID : 4050365591

Option 4 ID : 4050365590

**Sol.** Let $P(x_1\ y_1)$

equation of normal

$$\frac{x}{2x_1}-\frac{y}{y_1}=\frac{-1}{2}$$

It passes through $\left(\frac{-1}{3\sqrt{2}},0\right)$

$$\left(\frac{-1}{6\sqrt{2}\,x_1}=\frac{-1}{2}\right) \qquad \Rightarrow x_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{x_1^2}{1/2}+\frac{y_1^2}{1}=1$$

put $x_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}$

$y_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (as p lies in I[st] quadrant)

$$\text{euation of normal}=\frac{x}{2\times\frac{1}{3\sqrt{2}}}-\frac{y}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{-1}{2}$$

put $(0, \beta)$

$$\beta=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

***Differential Calculus***

***Methods of Differentiation***

**5.** Let $f(x)=(\sin(\tan^{-1}x)+\sin(\cot^{-1}x))^2-1,\ |x|>1$. If $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(f(x))\right)$ and $y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{6}$, then $y\left(-\sqrt{3}\right)$ is equal to :

माना $f(x)=(\sin(\tan^{-1}x)+\sin(\cot^{-1}x))^2-1,\ |x|>1$ है। यदि $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(f(x))\right)$ तथा $y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{6}$ हैं, तो $y\left(-\sqrt{3}\right)$ का मान है :

(1) $\frac{5\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{2\pi}{3}$ (4) $-\frac{\pi}{6}$

Ans. 1

Question ID : 4050361537

Option 1 ID : **4050365610**

Option 2 ID : 4050365611

Option 3 ID : 4050365609

Option 4 ID : 4050365608

**Sol.** $f(x)=\left(\sin(\tan^{-1}x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)\right)^2-1$

$f(x)=1+2\sin(\tan^{-1}x)\cos(\tan^{-1}x)-1$

$f(x)=\sin(2\tan^{-1}x)$

$\sin^{-1}f(x)=\sin^{-1}\sin(2\tan^{-1}x)$

$\sin^{-1}f(x)=\pi-2\tan^{-1}x \qquad \because x=\sqrt{3}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\pi-2\tan^{-1}x\right)$

$y=-\tan^{-1}x+c$

$\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+c$

$c=\frac{\pi}{2}$

$y=-\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}$

$y=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$

## *Coordinate Geometry*

### *Parabola*

**6.** The locus of a point which divides the line segment joining the point (0, –1) and a point on the parabola, $x^2 = 4y$, internally in the ratio 1 : 2, is :

बिन्दु (0, –1) तथा परवलय $x^2 = 4y$ पर स्थित एक बिन्दु को मिलाने वाले रेखाखण्ड का 1 : 2 के अनुपात में अंतः विभाजन करने वाले बिन्दु का बिन्दुपथ है :

(1) $4x^2 - 3y = 2$ (2) $9x^2 - 12y = 8$ (3) $x^2 - 3y = 2$ (4) $9x^2 - 3y = 2$

Ans. 2

Question ID : 4050361531

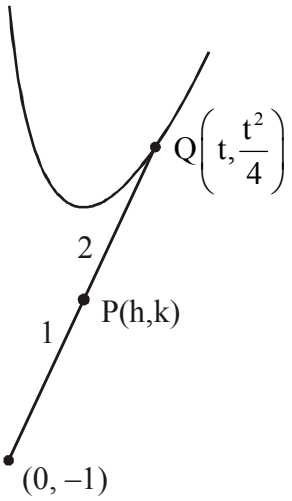
Option 1 ID : 4050365584

Option 2 ID : **4050365586**

Option 3 ID : 4050365585

Option 4 ID : 4050365587

**Sol.**




$$\frac{t}{3} = h\,,\ \frac{\frac{t^2}{4} - 2}{3} = k$$

$$9h^2 - 12k - 8 = 0$$

$$9x^2 - 12y - 8 = 0$$

***Differential Calculus***

***Monotonocity***

**7.** Let $f(x) = x\cos^{-1}(-\sin|x|).\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, then which of the following is true ?

माना $f(x) = x\cos^{-1}(-\sin|x|).\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है, तो निम्न में से कौनसा सत्य है ?

(1) f' is increasing in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ and decreasing in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(2) f is not differentiable at $x = 0$

(3) $f'(0) = -\frac{\pi}{2}$

(4) f' is decreasing in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ and increasing in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(1) f', $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ में वर्धमान है तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है।

(2) f', $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

(3) $f'(0) = -\frac{\pi}{2}$

(4) f' , $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ में ह्रासमान है तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है।

Ans. 4

Question ID : 4050361526

Option 1 ID : 4050365567

Option 2 ID : 4050365564

Option 3 ID : 4050365565

Option 4 ID : **4050365566**

**Sol.** $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\sin|x|)\right)$

$f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}(\sin|x|)\right)$

$f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}+|x|\right)$

$$f(x)\begin{cases}\rightarrow \frac{\pi x}{2}-x^2 & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \rightarrow \frac{\pi x}{2}-x^2 & -\frac{\pi}{2}\le x<0\end{cases}$$

$$f'(x)\begin{cases}\rightarrow \frac{\pi}{2}+2x & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \rightarrow \frac{\pi}{2}-2x & -\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

$$f''(x)\begin{cases}\rightarrow 2 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \rightarrow -2 & -\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

$f$ is $\uparrow$ in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$f$ is $\downarrow$ in $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

***Differential Calculus***

***Function***

**8.** Let $f:R\to R$ be such that for all $x\in R$, $(2^{1+x}+2^{1-x})$, $f(x)$ and $(3^x+3^{-x})$ are in A.P., then the minimum value of $f(x)$ is :

माना $f:R\to R$ इस प्रकार है कि सभी $x\in R$, $(2^{1+x}+2^{1-x})$, $f(x)$ तथा $(3^x+3^{-x})$ एक समान्तर श्रेढ़ी में है, तो $f(x)$ का न्यूनतम मान है .

(1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 0

Ans. 2

Question ID : 4050361524

Option 1 ID : 4050365559

Option 2 ID : **4050365558**

Option 3 ID : 4050365557

Option 4 ID : 4050365556

**Sol.** $f(x)=\dfrac{2^{1+x}+2^{1-x}+3^{x}+3^{-x}}{2}$

$f(x)=\left(2^{x}+\dfrac{1}{2^{x}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(3^{x}+\dfrac{1}{3^{x}}\right)$

$f(x)_{min}=2+1=3]$

***Differential Calculus***

***Function***

**9.** The inverse function of $f(x)=\dfrac{8^{2x}-8^{-2x}}{8^{2x}+8^{-2x}}, x\in(-1,1)$, is _____.

$f(x)=\dfrac{8^{2x}-8^{-2x}}{8^{2x}+8^{-2x}}, x\in(-1,1)$ का व्युत्क्रम फलन है_____ ।

(1) $\dfrac{1}{4}\log_e\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ (2) $\dfrac{1}{4}(\log_8^e)\log_e\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(3) $\dfrac{1}{4}\log_e\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (4) $\dfrac{1}{4}(\log_8^e)\log_e\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Ans. 2

Question ID : 4050361519

Option 1 ID : 4050365538

Option 2 ID : **4050365539**

Option 3 ID : 4050365536

Option 4 ID : 4050365537

**Sol.** $y=\dfrac{8^{2x}-8^{-2x}}{8^{2x}+8^{-2x}}$

$y=\dfrac{8^{4x}-1}{4^{4x}+1}$

$y8^{4x}-y=8^{4x}-1$

$8^{4x}=\dfrac{1+y}{1-y}$

$\log_e 8^{4x}=\log_e\dfrac{1+y}{1-y}$

$$4x = \log_8^e . \log_e \frac{1+y}{1-y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\log_8^e \log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

***Algebra***

***P &C***

**10.** If a, b and c are the greatest values of ${}^{19}C_p, {}^{20}C_q$ and ${}^{21}C_r$ respectively, then :

यदि a, b तथा c क्रमशः ${}^{19}C_p, {}^{20}C_q$ तथा ${}^{21}C_r$ के अधिकतम मान हैं, तो :

(1) $\frac{a}{10} = \frac{b}{11} = \frac{c}{21}$ (2) $\frac{a}{10} = \frac{b}{11} = \frac{c}{42}$ (3) $\frac{a}{11} = \frac{b}{22} = \frac{c}{42}$ (4) $\frac{a}{11} = \frac{b}{22} = \frac{c}{21}$

Ans. 3

Question ID : 4050361523

Option 1 ID : 4050365554

Option 2 ID : 4050365553

Option 3 ID : **4050365555**

Option 4 ID : 4050365552

**Sol.** $a = {}^{19}C_p = {}^{19}C_{10} = {}^{19}C_9$

$b = {}^{20}C_q = {}^{20}C_{10}$

$c = {}^{21}C_r = {}^{21}C_{10} = {}^{21}C_{11}$

$$\frac{a}{{}^{19}C_9} = \frac{b}{\frac{20}{10}{}^{19}C_9} = \frac{c}{\frac{21}{11}.\frac{20}{10}{}^{19}C_9}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{\frac{42}{11}}$$

$$\frac{a}{11} = \frac{b}{22} = \frac{c}{42}$$

***Coordinate Geometry***

***Straight Line***

**11.** Let two points be A(1, –1) and B(0, 2). If a point P(x', y') be such that the area of $\Delta PAB = 5$ sq. units and it lies on the line, $3x + y - 4\lambda = 0$, then a value of $\lambda$ is :

माना A(1, –1) तथा B(0, 2) दो बिन्दु हैं । यदि एक बिन्दु P(x', y') इस प्रकार है कि $\Delta PAB = 5$ वर्ग इकाई है तथा यह रेखा $3x + y - 4\lambda = 0$ पर स्थित है, तो $\lambda$ का एक मान है :

(1) –3 (2) 1 (3) 4 (4) 3

Ans. 4

Question ID : 4050361522

Option 1 ID : 4050365550

Option 2 ID : 4050365548

Option 3 ID : 4050365549

Option 4 ID : **4050365551**

**Sol.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x^1 & y^1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\left|-3x^1 - y^1 + 2\right| = 10$

$3x^1 + y^1 - 2 = 10$ or $3x^1 + y^1 - 2 = -10$

$3x^1 + y^1 - 12 = 0$ $3x^1 + y^1 + 8 = 0$

$\lambda = 3$ $\lambda = -2$

***JEE Main Only topics***

***Mathematical Reasoning***

**12.** Which one of the following is a tautology ?

निम्न में से कौनसा कथन एक पुनरुक्ति है ?

(1) $Q \rightarrow (P \wedge (P \rightarrow Q))$ (2) $P \wedge (P \vee Q)$ (3) $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ (4) $P \vee (P \wedge Q)$

Ans. 3

Question ID : 4050361538

Option 1 ID : 4050365615

Option 2 ID : 4050365612

Option 3 ID : **4050365614**

Option 4 ID : 4050365613

**Sol.**

| p | q | $p \rightarrow q$ | $p \cap (p \rightarrow q)$ | $q \rightarrow (p \cap (p \rightarrow q))$ | $p \cap q$ | $p \cup (p \cup q)$ | $p \cup q$ | $p \cap (p \cup q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T | F | T | T | T |
| F | T | T | T | F | F | F | T | F |
| F | F | T | T | T | F | F | F | F |

***Algebra***

***Determinant***

**13.** For which of the following ordered pairs $(\mu, \delta)$, the system of linear equations

निम्न में से किस क्रमित युग्म $(\mu, \delta)$ के लिए रैखिक समीकरण निकाय

$x + 2y + 3z = 1$

$3x + 4y + 5z = \mu$

$4x + 4y + 4z = \delta$

is inconsistent ?

असंगत है ?

(1) (3, 4) (2) (4, 6) (3) (4, 3) (4) (1, 0)

Ans. 3

Question ID : 4050361521

Option 1 ID : 4050365545

Option 2 ID : 4050365547

Option 3 ID : **4050365546**

Option 4 ID : 4050365544

**Sol.** $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mu & 4 & 5 \\ \delta & 4 & 4 \end{vmatrix} = -2(2 - 2\mu + \delta)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & \mu & 5 \\ 4 & \delta & 4 \end{vmatrix} = 4(2 - 2\mu + \delta)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & \mu \\ 4 & 4 & \delta \end{vmatrix} = -2(2 - 2\mu + \delta)$$

***JEE Main Only topics***

***Statistics***

**14.** The mean and the standard deviation (s.d.) of 10 observations are 20 and 2 respectively. Each of these 10 observations is multiplied by p and then reduced by q, where $p \neq 0$ and $q \neq 0$. If the new mean and new s.d. become half of their original values, then q is equal to :

10 प्रेक्षणों के माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 20 तथा 2 हैं। इन 10 प्रेक्षणों में से प्रत्येक को p से गुणा करने के पश्चात् प्रत्येक में से q कम किया गया, जहां $p \neq 0$ तथा $q \neq 0$ हैं। यदि नए माध्य तथा मानक विचलन के मान अपने मूल मानों के आधे हैं, तो q का मान है :

(1) –20 (2) –10 (3) –5 (4) 10

Ans. 1

Question ID : 4050361535

Option 1 ID : **4050365603**

Option 2 ID : 4050365602

Option 3 ID : 4050365600

Option 4 ID : 4050365601

**Sol.** New mean $\overline{x}_1 = p\overline{x} - q$

$10 = p(20) - q$ .....(1)

and New s.d.

$\sigma_2 = |\sigma|\sigma_1$

$1 = |p|\sigma_1$

$p = \pm\frac{1}{2}$

If $p = \frac{1}{2}$

then $q = 0$ from equation (1)

If $p = -\frac{1}{2}$

then $q = -20$

***Algebra***

***Complex Number***

**15.** If the equation, $x^2 + bx + 45 = 0$ $(b \in R)$ has conjugate complex roots and they satisfy $|z + 1| = 2\sqrt{10}$, then :

यदि समीकरण $x^2 + bx + 45 = 0$ $(b \in R)$ के संयुग्मी सम्मिश्र मूल हैं, जो $|z + 1| = 2\sqrt{10}$ को संतुष्ट करते हैं, तो :

(1) $b^2 + b = 72$ (2) $b^2 - b = 30$ (3) $b^2 + b = 12$ (4) $b^2 - b = 42$

Ans. 2

Question ID : 4050361520

Option 1 ID : 4050365543

Option 2 ID : **4050365542**

Option 3 ID : 4050365540

Option 4 ID : 4050365541

**Sol.** Let $z = \alpha \pm i\beta$ be roots of the equation $x^2 + bx + 45 = 0$

sum of roots $= 2d = -b$

Product of roots $= \alpha^2 + \beta^2 = 45$ .....(1)

$|z + 1| = 2\sqrt{10}$

$|\alpha \pm i\beta + 1| = 2\sqrt{10}$

$(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 40$ .....(2)

from (1) and (2)

$2\alpha + 1 = 5$

$\alpha = -3$

$b = 6$

***Vectors***

***Vectors***

**16.** The shortest distance between the lines $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ is.

रेखाओं $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ तथा $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4}$ के बीच की न्यूनतम दूरी है :

(1) 3 (2) $3\sqrt{30}$ (3) $\frac{7}{2}\sqrt{30}$ (4) $2\sqrt{30}$

Ans. 2

Question ID : 4050361533

Option 1 ID : 4050365594

Option 2 ID : **4050365593**

Option 3 ID : 4050365595

Option 4 ID : 4050365592

**Sol.** $\overline{p} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ A (3, 8, 3)

$\overline{q} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ B(–3, –7, 6)

$$\overline{p} \times \overline{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6\hat{i} - 15\hat{j} + 3\hat{k}$$

$\overline{AB} = -6\hat{i} - 15\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\text{S.D.} = \left| \frac{AB.(\overline{p} \times \overline{q})}{|\overline{p} \times \overline{q}|} \right| = \left| \frac{36 + 225 + 9}{\sqrt{36 + 225 + 9}} \right| = 3\sqrt{30}$$

***Integral Calculus***

***Area Under Curve***

**17.** For a > 0, let the curves $C_1 : y^2 = ax$ and $C_2 : x^2 = ay$ intersect at origin O and a point P. Let the line x = b (0 < b < a) intersect the chord OP and the x-axis at points Q and R, respectively. If the line x = b bisects the are bounded by the curves, $C_1$ and $C_2$, and the area of $\Delta OQR = \frac{1}{2}$, 'a' satisfies the equation :

a > 0 के लिए, माना वक्र $C_1 : y^2 = ax$ तथा $C_2 : x^2 = ay$, मूलबिन्दु O तथा एक बिन्दु P पर काटते हैं। माना रेखा x = b (0 < b < a), जीवा OP तथा x-अक्ष को क्रमशः बिन्दुओं Q तथा R पर काटती है। यदि रेखा x = b, वक्रों $C_1$ तथा $C_2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र को समद्विभाजित करती है तथा $\Delta OQR$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ है, तो 'a' जिस समीकरण को संतुष्ट करता है, वह है :

(1) $x^6 + 6x^3 - 4 = 0$ (2) $x^6 - 12x^3 - 4 = 0$ (3) $x^6 - 6x^3 + 4 = 0$ (4) $x^6 - 12x^3 + 4 = 0$

Ans. 4

Question ID : 4050361529

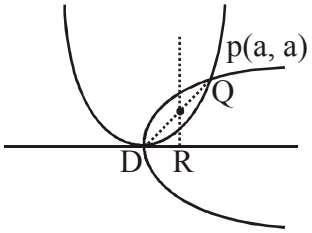
Option 1 ID : 4050365576

Option 2 ID : 4050365578

Option 3 ID : 4050365579

Option 4 ID : **4050365577**

**Sol.**




$$\text{Total area} = \frac{16ab}{3} = \frac{16 \times \frac{a}{4} \times \frac{a}{4}}{3} = \frac{a^2}{3}$$

$\int_0^b \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{a^2}{6}$ $\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}$ $b = 1$

$\frac{2}{3}\sqrt{a}\,b^{3/2} - \frac{b^3}{3a} = \frac{a^2}{6}$ .....(1)

Put in equation (1)

$a^6 - 12a^3 + 4 = 0$

***Differential Calculus***

***Limit***

**18.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+2}{7x^2+2}\right)^{1/x^2}$ is equal to :

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+2}{7x^2+2}\right)^{1/x^2}$ बराबर है :

(1) $\frac{1}{e^2}$ (2) e (3) $\frac{1}{e}$ (4) $e^2$

Ans. 1

Question ID : 4050361525

Option 1 ID : **4050365563**

Option 2 ID : 4050365560

Option 3 ID : 4050365562

Option 4 ID : 4050365561

**Sol.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+2}{7x^2+2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{3x^2+2}{7x^2+2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{\frac{-4x^2}{7x^2+2}\right\}} = e^{-2}$

***Integral Calculus***

***Differential Equation***

**19.** Let $y = y(x)$ be a solution of the differential equation, $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0, |x| < 1$. If $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, then $y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ is equal to :

माना $y = y(x)$, अवकल समीकरण $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0, |x| < 1$ का एक हल है। यदि $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, तो $y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ बराबर है :

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ans. 2

Question ID : 4050361530

Option 1 ID : 4050365582

Option 2 ID : **4050365581**

Option 3 ID : 4050365583

Option 4 ID : 4050365580

**Sol.** $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$

$\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=c$

At $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$c=\frac{\pi}{2}$

$\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$\sin^{-1}y=\cos^{-1}x$

$x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin^{-1}y=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\alpha}{4}$

$\sin\sin^{-1}y=\sin\frac{3\alpha}{4}$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

***Integral Calculus***

***Indefinite Integration***

**20.** If $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x(1+\sin^6 x)^{2/3}}=f(x)(1+\sin^6 x)^{1/\lambda}+c$ where c is a constant of integration, then $\lambda f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ is equal to :

यदि $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x(1+\sin^6 x)^{2/3}}=f(x)(1+\sin^6 x)^{1/\lambda}+c$ है, जहां c एक समाकलन अचर है, तो $\lambda f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ का मान है :

(1) 2 (2) $-\frac{9}{8}$ (3) $\frac{9}{8}$ (4) $-2$

Ans. 4

Question ID : 4050361528

Option 1 ID : 4050365574

Option 2 ID : 4050365573

Option 3 ID : 4050365572

Option 4 ID : **4050365575**

**Sol.** $\sin x = t$

$\cos x\, dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{t^3(1+t^6)^{\frac{2}{3}}}$$

$$I = \int \frac{t^{-7}}{(1+t^{-6})^{\frac{2}{3}}} dt$$

$1 + t^{-6} = \alpha^3$

$$\frac{dt}{t^7} = -\frac{1}{2} r^2 dr$$

$$-\frac{1}{2}\int dr = -\frac{1}{2} r + c$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6_{2x+1}}{\sin 6_x}\right)^{\frac{1}{3}} + c$$

$$= = -\frac{1}{2\sin^2 x}(1+\sin 6_x)^{\frac{1}{3}} + c$$

## INTEGER TYPE QUESTIONS

### *Coordinate Geometry*

### *Hyperbola*

**21.** Let the normal at a point P on the curve $y^2 - 3x^2 + y + 10 = 0$ intersect the y-axis at $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. If m is the slope of the tangent at P to the curve, then |m| is equal to _____.

माना वक्र $y^2 - 3x^2 + y + 10 = 0$ के बिन्दु P पर खींचा गया अभिलम्ब y-अक्ष को $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ पर काटता है। यदि P पर वक्र की स्पर्श रेखा का ढाल m है, तो |m| बराबर है _____।

Question ID : 4050361542

**Ans.** **4**

**Sol.** $p(x_1\, y_1)$

$$2y\frac{dy}{dx} - 6x + \frac{dy}{dx} = 0 \qquad y_1 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x_1}{1+2b_1} \qquad x_1 \pm 2$$

$$\frac{\frac{3}{2} - y_1}{-x_1} = -\frac{1+2y_1}{6x_1} \qquad \text{slope of tangent} = \pm 4$$

***Algebra***

***P &C***

**22.** An urn contains 5 red marbles, 4 black marbles and 3 white marbles. Then the number of ways in which 4 marbles can be drawn so that the most three of them are red is _____.

एक कलश में 5 लाल मार्बल, 4 काले मार्बल तथा 3 सफेद मार्बल हैं, तो इसमें से 4 मार्बल इस प्रकार निकालने ताकि उनमें से अधिक से अधिक तीन लाल रंग के हों, के तरीकों की संख्या है_____ ।

Question ID : 4050361543

**Ans.** **490**

**Sol.** 0.Red + 1 Red + 2 Red + 3 Red

Number of ways = ${}^7C_4 + {}^5C_1 + {}^7C_3 + {}^7C_2{}^7C_2 + {}^5C_3{}^7C_1 = 490$

***Algebra***

***Quadratic Equation***

**23.** The least positive value of 'a' for which the equation, $2x^2 + (a-10)x + \frac{33}{2} = 2a$ has real roots is_____.

'a' का वह न्यूनतम धनात्मक मान, जिसके लिए समीकरण $2x^2 + (a-10)x + \frac{33}{2} = 2a$ के वास्तविक मूल हैं, है_____ ।

Question ID : 4050361539

**Ans.** **8**

**Sol.** $D \geq 0$

$$(a-10)^2 - 4(2)\left(\frac{33}{2} - 29\right) \geq 0$$

$a^2 - 4a - 32 \geq 0$

$a \in (-\infty - 4] \cup [8, \infty)$

***Algebra***

***Matrices***

**24.** The number of all $3 \times 3$ matrices A, with enteries from the set $\{-1, 0, 1\}$ such that the sum of the diagonal elements of $AA^T$ is 3, is_____.

ऐसे सभी $3 \times 3$ आव्यूहों A की संख्या, जिनके अवयव समुच्चय $\{-1, 0, 1\}$ से हैं। तथा $AA^T$ के विकर्ण के अवयवों का योगफल 3 है, है_____ ।

Question ID : 4050361540

**Ans.** **672**

**Sol.** Let $A \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\quad A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$tr(AA^T) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{33}^2 = 3$$

$$\left.\begin{array}{c}0,0,0,0,0,0,1,1,1\to 1\\ 0,0,0,0,0,0,-1,-1,-1\to 1\\ 0,0,0,0,0,0,1,1,-1\to 3\\ 0,0,0,0,0,0,-1,1,-1\to 3\end{array}\right\}{}^{9}C_{6}\times 8=672$$

## *Algebra*

### *Sequence & progression*

**25.** The sum $\sum_{k=1}^{20}(1+2+3+.....+k)$ is_____.

योगफल $\sum_{k=1}^{20}(1+2+3+.....+k)$ है_____।

Question ID : 4050361541

**Ans. 1540**

**Sol.** $\sum_{k=1}^{20}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k^2+k)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{20(21)(41)}{6}+\frac{20\times 21}{2}\right)$

$=1540$