JEE Adv. May 2024

Question Paper With Text Solution

18 May | Paper-2

MATHEMATICS

MATRIX

JEE Main & Advanced | XI-XII Foundation| VI-X Pre-Foundation

Office : Piprali Road, Sikar (Raj.) | Ph. 01572-241911
Website : www.matrixedu.in ; Email : smd@matrixacademy.co.in

JEE ADV. MAY 2024 | 26TH. MAY PAPER-2

SECTION – 1 (MAXIMUM MARKS: 12)

- This section contains **FOUR (04)** question stems.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +3 **ONLY** the correct option is chosen;

Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);

Negative Marks : –1 In all other cases.

1. Let x_0 be the real number such that $e^{x_0} + x_0 = 0$. For a given real number α, define

$$g(x) = \frac{3xe^x + 3x - \alpha e^x - \alpha x}{3(e^x + 1)}$$

for all real numbers x.

Then which one of the following statements is TRUE?

(A) For $\alpha = 2$, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = 0$

(B) For $\alpha = 2$, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = 1$

(C) For $\alpha = 3$, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = 0$

(D) For $\alpha = 3$, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = \frac{2}{3}$

मान लीजिए कि x_0 वह वास्तविक संख्या (real number) है कि $e^{x_0} + x_0 = 0$ है। किसी दी गयी एक वास्तविक संख्या α, तथा सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए $g(x) = \frac{3xe^x + 3x - \alpha e^x - \alpha x}{3(e^x + 1)}$ परिभाषित कीजिये।

तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा एक कथन सत्य है?

(A) $\alpha = 2$ के लिए, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = 0$ है

(B) $\alpha = 2$ के लिए, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = 1$ है

(C) $\alpha = 3$ के लिए, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = 0$ है

(D) $\alpha = 3$ के लिए, $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x) + e^{x_0}}{x - x_0} \right| = \frac{2}{3}$ है

Ans. C

Sol. $g(x) = x - \frac{\alpha(e^x + x)}{3(e^x + 1)}$

$$g'(x) = 1 - \frac{\alpha}{3}\left\{\frac{(e^x+1)^2 - (e^x+x)\cdot e^x}{(e^x+1)^2}\right\}$$

$$g'(x_0) = 1 - \frac{\alpha}{3}\left\{\frac{(e^{x_0}+1)^2 - 0}{(e^{x_0}+1)^2}\right\}$$

$$g'(x_0) = 1 - \frac{\alpha}{3}$$

$$\lim_{x \to x_0}\left|\frac{g(x)+e^{x_0}}{x-x_0}\right| \left(\frac{0}{0}\right)$$

Using L'Hospital Rule

$$= \lim_{x \to x_0}\left|\frac{g'(x)}{1}\right| = |g'(x_0)|$$

$$= \left|1 - \frac{\alpha}{3}\right|$$

for $\alpha = 3 \Rightarrow L = 0$

2. Let **R** denote the set of all real numbers. Then the area of the region

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x > 0, y > \frac{1}{x}, 5x - 4y - 1 > 0, 4x + 4y - 17 < 0\right\}$$

is :

मान लीजिए कि **R** सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) के समुच्चय (set) को दर्शाता है। तब क्षेत्र (region)

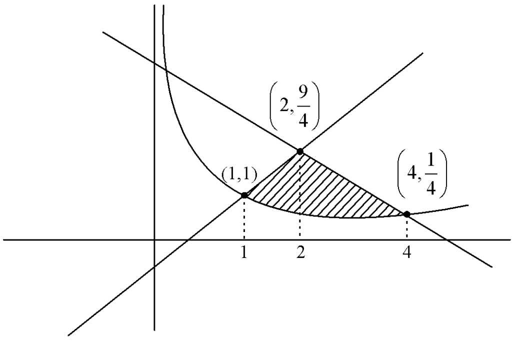
$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x > 0, y > \frac{1}{x}, 5x - 4y - 1 > 0, 4x + 4y - 17 < 0\right\}$$

का क्षेत्रफल (area) है :

(A) $\frac{17}{16}-\log_e 4$ (B) $\frac{33}{8}-\log_e 4$ (C) $\frac{57}{8}-\log_e 4$ (D) $\frac{17}{2}-\log_e 4$

Ans. B

Sol.



$$A=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{9}{4}\right)\times 1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\right)\times 2-\int_1^4\frac{1}{x}dx$$

$$A=\frac{33}{8}-\ell n4$$

3. The total number of real solutions of the equation $\theta=\tan^{-1}(2\tan\theta)-\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{6\tan\theta}{9+\tan^2\theta}\right)$ is

(Here, the inverse trigonometric functions $\sin^{-1}x$ and $\tan^{-1}x$ assume values in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ and $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, respectively)

समीकरण (equation) $\theta=\tan^{-1}(2\tan\theta)-\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{6\tan\theta}{9+\tan^2\theta}\right)$ के कुल वास्तविक हलों की संख्या (total number of real solutions) है

(यहाँ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, (inverse trigonometric functions) $\sin^{-1}x$ तथा $\tan^{-1}x$ के मान क्रमशः $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ और $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ में हैं।)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

Ans. C

Sol. $$\theta = \tan^{-1}(2\tan\theta) - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2\left(\frac{\tan\theta}{3}\right)}{1+\left(\frac{\tan\theta}{3}\right)^2}\right)$$

Let $\frac{\tan\theta}{3} = \tan\alpha$

$$\theta = \tan^{-1}(2\tan\theta) - \frac{1}{2}\sin^{-1}(\sin 2\alpha)$$

Case-I : $2\alpha \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

$\tan\alpha \in (-\infty, -1)$

$$\frac{\tan\theta}{3} \in (-\infty, -1)$$

$\tan\theta \in (-\infty, -3)$

$$\theta = \tan^{-1}(2\tan\theta) - \frac{1}{2}(-\pi - 2\alpha)$$

$$\theta - \frac{\pi}{2} = \tan^{-1}(2\tan\theta) + \alpha$$

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\tan\theta + \tan\alpha}{1 - 2\tan\theta\cdot\tan\alpha}$$

$$-\frac{1}{\tan\theta} = \frac{2\tan\theta + \frac{\tan\theta}{3}}{1 - \frac{2\tan^2\theta}{3}}$$

$$\frac{-1}{\tan\theta} = \frac{7\tan\theta}{3 - 2\tan^2\theta}$$

$5\tan^2\theta = -3$

No solution.

Case-II : $2\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$\tan\theta \in [-3, 3]$

$\theta = \tan^{-1}(2\tan\theta) - \frac{1}{2}(2\alpha)$

$\tan\theta = \frac{2\tan\theta - \tan\alpha}{1 + 2\tan\theta\tan\alpha}$

$\tan\theta = \frac{5\tan\theta}{3 + 2\tan^2\theta}$ $\quad\left(\tan\alpha = \frac{\tan\theta}{3}\right)$

$\tan\theta = 0$ or $\tan^2\theta = 1$

$\tan\theta = \pm 1$

3 solutions

Case-III : $2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\tan\theta \in (3, \infty)$

$\theta = \tan^{-1}(2\tan\theta) - \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha)$

$\frac{\pi}{2} + \theta = \tan^{-1}(2\tan\theta) + \alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{2\tan\theta + \tan\alpha}{1 - 2\tan\theta\tan\alpha}$

$$\frac{-1}{\tan\theta}=\frac{7\tan\theta}{3-2\tan^2\theta} \qquad \left(\tan\alpha=\frac{\tan\theta}{3}\right)$$

$5\tan^2\theta=-3$

No solution

Total 3 solutions.

4. Let S denote the locus of the point of intersection of the pair of lines

$4x - 3y = 12\alpha$,

$4\alpha x + 3\alpha y = 12$,

where α varies over the set of non-zero real numbers. Let T be the tangent to S passing through the points (p, 0) and (0, q), q > 0, and parallel to the line $4x-\frac{3}{\sqrt{2}}y=0$. Then the value of pq is :

मान लीजिए कि S, रेखा–युग्म (pair of lines)

$4x - 3y = 12\alpha$,

$4\alpha x + 3\alpha y = 12$,

के प्रतिच्छेदन बिन्दु (point of intersection) के बिन्दुपथ (locus) को दर्शाता है, जहाँ α शून्येतर वास्तविक संख्याओं (non-zero real numbers) के समुच्चय (set) पर विचरित करता (varies on) है। मान लीजिए कि T, वक्र (curve) S पर वह स्पर्श–रेखा (tangnet) है जो बिन्दुओं (p, 0) तथा (0, q), q > 0, से गुजरती है, और रेखा $4x-\frac{3}{\sqrt{2}}y=0$ के समांतर (parallel) है। तब pq का मान है :

(A) $-6\sqrt{2}$ (B) $-3\sqrt{2}$ (C) $-9\sqrt{2}$ (D) $-12\sqrt{2}$

Ans. A

Sol. $4x - 3y = 12\alpha$

$12 = \alpha(4x + 3y)$

$$\frac{4x-3y}{12}=\frac{12}{4x+3y}$$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

$T : y = mx \pm \sqrt{9m^2-16}$

$m = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$T : y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}x + 4 \qquad (q > 0)$

$p = \dfrac{-3}{\sqrt{2}}$

$q = 4$

$pq = -6\sqrt{2}$

SECTION – 2 (MAXIMUM MARKS: 16)

- This section contains **FOUR (04)** question stems.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks	: +4 **ONLY** if (all) the correct option(s) is(are) chosen;
Partial Marks	: +3 If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2 If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1 If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is acorrect option;
Zero Marks	: 0 If unanswered;
Negative Marks	: –2 In all other cases.

- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the ONLY three options corresponding to correct answers, then

choosing ONLY (A), (B) and (D) will get +4 marks;

choosing ONLY (A) and (B) will get +2 marks;

choosing ONLY (A) and (D) will get +2marks;

choosing ONLY (B) and (D) will get +2 marks;

choosing ONLY (A) will get +1 mark;

choosing ONLY (B) will get +1 mark;

choosing ONLY (D) will get +1 mark;

choosing no option(s) (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks and choosing any other option(s) will get -2 marks.

5. Let $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Let $Q = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 4 \end{pmatrix}$ for some non-zero real numbers x, y, and z, for which there is a 2×2 matrix R with all entries being non-zero real numbers, such that QR = RP.

Then which of the following statements is (are) TRUE?

(A) The determinant of $Q - 2I$ is zero
(B) The determinant of $Q - 6I$ is 12
(C) The determinant of $Q - 3I$ is 15
(D) $yz = 2$

मान लीजिए कि $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, और $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ हैं। मान लीजिए कि किन्हीं शून्येतर (non-zero) वास्तविक संख्याओं (real numbers) x, y और z के लिए $Q = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 4 \end{pmatrix}$ है, जिसके लिए एक 2×2 आव्यूह (matrix) R है, जिसकी सभी प्रविष्टियाँ (entries) शून्यतेर वास्तविक संख्याएँ हैं, तथा QR = RP है।

तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा(से) सत्य है (हैं)?

(A) $Q - 2I$ का सारणिक (determinant) शून्य (zero) है
(B) $Q - 6I$ का सारणिक (determinant) 12 है
(C) $Q - 3I$ का सारणिक (determinant) 15 है
(D) $yz = 2$ है

Ans. AB

Sol. Let $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

QR = RP

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$ax + cy = 2a \Rightarrow cy = a(2 - x)$

$bx + dy = 3b \Rightarrow dy = b(3 - x)$

$az + 4c = 2c \Rightarrow az = -2c$

$bz + 4d = 3d \Rightarrow bz = -d$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{d} = \dfrac{a(2-x)}{b(3-x)} \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{2c}{d}\end{array}\right\} \Rightarrow x = 1$$

$cy \cdot az = a(2 - x)(-2c)$

$yz = -2(2 - x)$

$yz = -2 \Rightarrow D$ (wrong)

$$|Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} x-\lambda & y \\ z & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (x - \lambda)(4 - \lambda) - yz$

$|Q - \lambda I| = (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2$

$\lambda = 2 \Rightarrow |Q - 2I| = 0$ (A) $\rightarrow$ (Right)

$\lambda = 6 \Rightarrow |Q - 6I| = 12$ (B) $\rightarrow$ (Right)

$\lambda = 3 \Rightarrow |Q - 3I| = 0$ (C) $\rightarrow$ (Wrong)

6. Let S denote the locus of the mid-points of those chords of the parabola $y^2 = x$, such that the area of the region enclossed between the parabola and the chord is $\frac{4}{3}$. Let R denote the region lying in the first quadrant, enclosed by the parabola $y^2 = x$, the curve S, and the lines $x = 1$ and $x = 4$.

Then which of the following statements is (are) TRUE?

(A) $\left(4, \sqrt{3}\right) \in S$

(B) $\left(5, \sqrt{2}\right) \in S$

(C) Area of R is $\frac{14}{3} - 2\sqrt{3}$

(D) Area of R is $\frac{14}{3} - 2\sqrt{3}$

मान लीजिए कि S, परवलय (parabola) $y^2 = x$ की उन सभी जीवाओं (chord) के मध्य–बिन्दुओं (mid-points) का बिन्दुपथ (locus) है, जिनके लिए परवलय एवं जीवा द्वारा घिरे क्षेत्र (region enclosed) का क्षेत्रफल (area) $\frac{4}{3}$ है। मान लीजिए कि R प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में उस क्षेत्र को दर्शाता है, जो परवलय $y^2 = x$, वक्र (curve) S, और रेखाओं $x = 1$ तथा $x = 4$ द्वारा घिरा हुआ है।

तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सत्य है (हैं)?

(A) $\left(4,\sqrt{3}\right)\in S$

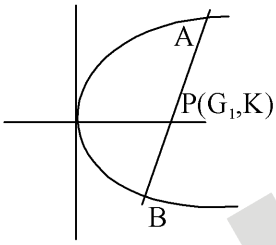
(B) $\left(5,\sqrt{2}\right)\in S$

(C) R का क्षेत्रफल $\frac{14}{3}-2\sqrt{3}$ है

(D) R का क्षेत्रफल $\frac{14}{3}-2\sqrt{3}$ है

Ans. AC

Sol. Equation of chord AB $T = S_1$



$$ky-\left(\frac{x+h}{2}\right)=k^2-h$$

$x-2ky+2k^2-h=0$

$\Rightarrow h-k^2<0$

For area interchange x & y

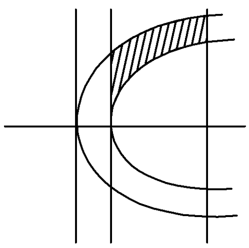
$y-2kx+2k^2-h=0$ & $y=x^2$

$$x^2-2kx+\left(2k^2-h\right)=0\left\langle\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$$

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{4k^2-4\left(2k^2-h\right)}=\sqrt{4h-4k^2}$$

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\left(2kx+h-2k^2\right)-x^2\right)dx=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\left(4h-4k^2\right)^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{4}{3}$$



$$\left(4h-4k^2\right)^{\frac{3}{2}}=8$$

$\Rightarrow (4h-4k^2)=4$

$h-k^2=1$

$\left(4,\sqrt{3}\right)\in S$

$$A=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)dx=\frac{2}{3}\left[\left(x^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_1^4$$

$$=\frac{2}{3}\left(8-3\sqrt{3}-1\right)=\frac{14}{3}-2\sqrt{3}$$

7. Let $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$ be two distinct points on the ellipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

such that $y_1 > 0$, and $y_2 > 0$. Let C denote the circle $x^2 + y^2 = 9$, and M be the point (3, 0). Suppose the line $x = x_1$ intersects C at R, and the line $x = x_2$ intersects C at S, such that the y-coordinates of R and S are positive.

Let $\angle ROM = \frac{\pi}{6}$ and $\angle SOM = \frac{\pi}{3}$, where O denote the origin (0, 0). Let |XY| denote the length of the line segment XY.

Then which of the following statements is (are) TRUE?

(A) The equation of the line joining P and Q is $2x + 3y = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$

(B) The equation of the line joining P and Q is $2x + y = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$

(C) If $N_2 = (x_2, 0)$, then $3|N_2Q| = 2|N_2S|$

(D) If $N_1 = (x_1, 0)$, then $9|N_1P| = 4|N_1R|$

मान लीजिए कि $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$, दीर्घवृत्त (ellipse)

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

पर दो ऐसे भिन्न बिन्दु हैं, कि $y_1 > 0$ और $y_2 > 0$ हैं। मान लीजिए कि C, वृत्त (circle) $x^2 + y^2 = 9$ को दर्शाता है, और M, बिन्दु (3, 0) है। मान लीजिए कि रेखा(line) $x = x_1$, वृत्त C को R पर प्रतिच्छेदित (intersect) करती है, और रेखा $x = x_2$, वृत्त C को को S प्रतिच्छेदित करती है, जहाँ R तथा S के y-निर्देशांक (y-coordinates) धनात्मक (positive) हैं।

मान लीजिए कि $\angle ROM = \frac{\pi}{6}$ और $\angle SOM = \frac{\pi}{3}$ हैं, जहाँ O मूलबिन्दु (origin) (0, 0) को दर्शाता है। मान लीजिए कि |XY|, रेखाखण्ड (line segment) XY की लम्बाई को दर्शाता है।

तब निम्नलिखित कथनों मे से कौनसा (से) सत्य है (हैं)?

(A) P और Q को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण (equation) $2x + 3y = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$ है

(B) P और Q को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण (equation) $2x + y = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$ है

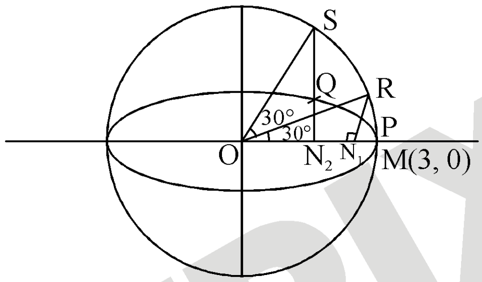
(C) If $N_2 = (x_2, 0)$, then $3|N_2Q| = 2|N_2S|$

(D) If $N_1 = (x_1, 0)$, then $9|N_1P| = 4|N_1R|$

Ans. AC

Sol. $P \equiv (3\cos 30°, 2\sin 30°) \equiv \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

$Q \equiv (3\cos 60°, 2\sin 60°) \equiv \left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$



$R\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), S\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$M_{PQ} = \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{3}$$

Equation of line PQ

$$y - \sqrt{3} = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$2x + 3y = 3\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Now if $N_2 \equiv (x_2, 0) \equiv \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$|N_2Q| = \sqrt{3}$ and $|N_2S| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 3|N_2Q| = 2|N_2S|$

Now if $N_1 = (x_1, 0)$

$$\Rightarrow N_1 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$\Rightarrow |N_1P| = 1,\ |N_1R| = \frac{3}{2}$

8. Let **R** denote the set of all real numbers. Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x + \sin x}{2x + \sin x} & \text{if} \quad x \neq 0, \\ \dfrac{7}{3} & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

Then which of the following statements is (are) TRUE?

(A) The point $x = 0$ is a point of local maxima of f

(B) The point $x = 0$ is a point of local minima of f

(C) Number of points of local maxima of f in the interval $[\pi, 6\pi]$ is 3

(D) Number of points of local minima of f in the interval $[2\pi, 4\pi]$ is 1

मान लीजिए **R** सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) के समुच्य (set) को दर्शाता है। मान लीजिए फलन (function) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x + \sin x}{2x + \sin x} & \text{if} \quad x \neq 0, \\ \dfrac{7}{3} & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सत्य है (हैं)?

(A) बिन्दु $x = 0$, f का एक स्थानीय उच्चतम का बिन्दु (point of local maxima) है

(B) बिन्दु $x = 0$, f का एक स्थानीय निम्नतम का बिन्दु (point of local minima) है।

(C) अंतराल (interval) $[\pi, 6\pi]$ में f के स्थानीय उच्चतम के बिन्दुओं (points of local maxima) की 3 संख्या है

(D) अंतराल (interval) $[2\pi, 4\pi]$ में f के स्थानीय निम्नतम के बिन्दुओं (points of local minima) की 1 संख्या है

Ans. BCD

SECTION – 3 (MAXIMUM MARKS: 24)

- This section contains **EIGHT (08)** question stems.
- The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the onscreen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +4 If **ONLY** the correct integer is entered;

Zero Marks : 0 In all other cases.

9. Let y(x) be the solution of the differential equation $x^2\frac{dy}{dx}+xy=x^2+y^2,\quad x>\frac{1}{e}$, satisfying $y(1)=0$.

Then the value of $2\frac{(y(e))^2}{y\left(e^2\right)}$ is _______.

मान लीजिए y(x), अवकल समीकरण (differential equation) $x^2\frac{dy}{dx}+xy=x^2+y^2,\quad x>\frac{1}{e}$, का वह हल (solution) है जो $y(1)=0$ को संतुष्ट करता है। तब $2\frac{(y(e))^2}{y\left(e^2\right)}$ का मान _______ है।

Ans. 0.75

Sol. Put $y=vx$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

So, $x^2\left(v+\frac{xdv}{dx}\right)+x^2v=x^2\left(1+v^2\right)$

$$v+\frac{xdv}{dx}+v=1+v^2$$

$$\frac{xdv}{dx}=1+v^2-2v$$

$$\int\frac{dv}{(v-1)^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{v-1}=\ell n|x|+C$$

$$\frac{x}{x-y}=\ell n|x|+C$$

$y(1) = 0$

$\Rightarrow C = 1$

Now, $\dfrac{x}{x-y} = \ell nx + 1$

$\dfrac{x}{x-y} = \ell nex$

$y(e) = \dfrac{e}{2}$ & $y(e^2) = \dfrac{2e^2}{3}$

$\therefore \dfrac{2(y(e))^2}{y(e^2)} = \dfrac{\dfrac{2e^2}{4}}{\dfrac{2e^2}{3}} = \dfrac{3}{4} = 0.75$

10. Let $a_0, a_1, \ldots, a_{23}$ be real numbers such that $\left(1+\frac{2}{5}x\right)^{23} = \sum_{i=0}^{23} a_i x^i$ for every real number x Let a_r be the largest among the numbers a_j for $0 \le j \le 23$.

Then the value of r is ________.

मान लीजिए कि $a_0, a_1, \ldots, a_{23}$ इस प्रकार की वास्तविक संख्याएँ (real numbers) हैं कि सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए, $\left(1+\frac{2}{5}x\right)^{23} = \sum_{i=0}^{23} a_i x^i$ है। मान लीजिए कि संख्याओं a_j, $0 \le j \le 23$, में सबसे बड़ी संख्या a_r है। तब r का मान ________ है।

Ans. 6

Sol. $x = 1$

$\left(1+\frac{2}{5}\right)^{23} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots\ldots a_{23}$

For N.G.T.

$\dfrac{n+1}{1+\left|\dfrac{x}{y}\right|} \qquad \Rightarrow \dfrac{23+1}{1+\dfrac{5}{2}} = \dfrac{48}{7}$

$\left[\frac{48}{7}\right] = 6 = r$

So T_7 is the numerically Greater term.

$r = 6$

11. A factory has a total of three manufacturing units, M_1, M_2, and M_3, which produce bulbs independent of each other. The units M_1, M_2, and M_3 produce bulbs in the proportions of 2 : 2 : 1, respectively. It is known that 20% of the bulbs produced in the factory are defective. It is also known that, of all the bulbs produced by M_1, 15% are defective. Suppose that, if a randomly chosen bulb produced in the factory is found to be defective, the probability that it was produced by M_2 is $\frac{2}{5}$.

If a bulb is chosen randomly from the bulbs produced by M_3, then the probability that it is defective is _______.

एक कारखाने (factory) में कुल तीन निर्माण इकाईयाँ (manufacturing units) M_1, M_2, और M_3 हैं, जो एक दूसरे से स्वतंत्र रूप से (independent of each other) बल्बों का उत्पादन करती हैं। इकाईयाँ M_1, M_2 और M_3 क्रमशः (respectively) 2 : 2 : 1 के अनुपात (proportions) में बल्ब बनाती हैं। यह ज्ञात है कि कारखाने में बनने वाले सभी बल्बों में 20% बल्ब खराब निकलते हैं। यह भी ज्ञात है कि M_1 द्वारा बनाये गये सभी बल्बों में 15% बल्ब खराब निकलते हैं। मान लीजिए कि, यदि कारखाने में बनाये गए बल्बों में से एक यादृच्छया (randomly) चुना गया बल्ब खराब पाया जाता है, तब इसके M_2 द्वारा बनाये जाने की प्रायिकता (probability) $\frac{2}{5}$ है।

यदि M_3 द्वारा बनाये गये बल्बों में से एक बल्ब यादृच्छया चुना जाता है, तब इसके खराब निकलने की प्रायिकता ________ है।

Ans. 0.3

Sol. Let total 100 bulbs Produced

$\Rightarrow n(m_1) = 40, n(m_2) = 40, n(m_3) = 20$

Total defective bulbs = 20

Defective by $m_1 = 6$

Defective by $m_2 = x$

Defective by $m_3 = 14 - x$

P(defective bulb) = 20/100

$$P\left(\frac{\text{Defective bulb by } M_2}{\text{Defective bulb}}\right) = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow \frac{x}{100}\cdot\frac{100}{20}=\frac{2}{5}\Rightarrow x=8$

$P\left(\frac{\text{defective bulb}}{m_3}\right)=\frac{6}{20}=3/10=0.3$

12. Consider the vectors $\vec{x}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{y}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, and $\vec{z}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$. For two distinct positive real number α and β, define $\vec{X}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}-\vec{z}, \vec{Y}=\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}-\vec{x}$, and $\vec{Z}=\alpha\vec{z}+\beta\vec{x}-\vec{y}$.

If the vectors $\vec{X},\vec{Y}$, and $\vec{Z}$ lie in a plane, then the value of $\alpha+\beta-3$ is _______.

सदिशों (vectors) $\vec{x}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{y}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, और $\vec{z}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ पर विचार कीजिए। दो भिन्न (distinct) धनात्मक (positive real number) α और β के लिए, $\vec{X}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}-\vec{z}, \vec{Y}=\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}-\vec{x}$, और $\vec{Z}=\alpha\vec{z}+\beta\vec{x}-\vec{y}$ परिभाषित कीजिए। यदि सदिश $\vec{X},\vec{Y}$ और $\vec{Z}$ एक समतल (plane) पर स्थित हैं, तब $\alpha+\beta-3$ का मान ________ है।

Ans. –2

Sol. $\vec{x}=(1,2,3), \vec{y}=(2,3,1), \vec{z}=(3,1,2)$

$$[\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}]=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & -1\\ -1 & \alpha & \beta\\ \beta & -1 & \alpha\end{vmatrix}[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}]=0$$

$$[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}]=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=5-2(1)+3(-7)\neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\alpha & \beta & -1\\ -1 & \alpha & \beta\\ \beta & -1 & \alpha\end{vmatrix}=0 \qquad R_1\to R_1+R_2+R_3$$

$$(\alpha+\beta-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & \alpha & \beta\\ \beta & -1 & \alpha\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (\alpha+\beta-1)(\alpha^2+\beta+\alpha+\beta^2+1-\alpha\beta)=0$

$\Rightarrow \alpha+\beta=1$ or $\alpha^2+\alpha(1-\beta)+\beta^2+\beta+1=0$

For $\alpha \in R^+$

$\Rightarrow D \geq 0$

$\Rightarrow (1-\beta)^2 - 4(1)(\beta^2+\beta+1) \geq 0$

$\Rightarrow 1 + \beta^2 - 2\beta - 4\beta^2 - 4\beta - 4 \geq 0$

$\Rightarrow -3\beta^2 - 6\beta - 3 \geq 0$

$\Rightarrow \beta^2 + 2\beta + 1 \leq 0$

$\Rightarrow (\beta+1)^2 \leq 0$

$\Rightarrow \beta = -1$ (not possible)

Hence $\alpha + \beta = 1$

13. For a non-zero complex number z, let arg(z) denote the principal argument of z, with $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. Let ω be the cube root of unity for which $0 < \arg(\omega) < \pi$. Let $\alpha = \arg\left(\sum_{n=1}^{2025}(-\omega)^n\right)$.

Then the value of $\frac{3\alpha}{\pi}$ is ________.

किसी शून्येतर (non-zero) सम्मिश्र संख्या (complex number) z के लिए, मान लीजिए कि arg(z), z के मुख्य कोणांक (principal argument) को दर्शाता है, जहाँ $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ है। मान लीजिए कि ω, एकक (unity) का वह घनमूल (cube root) है, जिसके लिए $0 < \arg(\omega) < \pi$ है। मान लीजिए कि $\alpha = \arg\left(\sum_{n=1}^{2025}(-\omega)^n\right)$.

है। तब $\frac{3\alpha}{\pi}$ का मान________ है।

Ans. –2

Sol. Clearly $= \omega = e^{+i2\pi/3}$

$$\sum_{n=1}^{2025}(-\omega)^n = \left[-\omega + \omega^2 - \omega^3 + \omega^4 - \omega^5 + \omega^6 ..... + \omega^{2024} - \omega^{2025}\right]$$

$$= \frac{(-\omega)\left(1-(-\omega)^{2025}\right)}{1+\omega}$$

$$= \frac{-\omega}{-\omega^2}\left(1+\omega^{2025}\right) = \frac{1}{\omega}(2) = \frac{2}{\omega} = 2\omega^2$$

$$\arg(z) = \frac{-2\pi}{3} = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{3\alpha}{\pi} = -2$$

14. Let R denote the set of all real numbers. Let $f : R \to R$ and $g : R \to (0, 4)$ be functions defined by $f(x) = \log_e(x^2 + 2x + 4)$, and $g(x) = \frac{4}{1+e^{-2x}}$. Define the composite function $f \circ g^{-1}$ by $(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x))$, where g^{-1} is the inverse of the function g.

Then the value of the derivative of the composite function $f \circ g^{-1}$ at $x = 2$ is ________.

मान लीजिए कि **R** सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) के समुच्चय (set) को दर्शाता है। मान लीजिए कि फलन (function) $f : R \to R$ और $g : R \to (0, 4)$, $f(x) = \log_e(x^2 + 2x + 4)$, और $g(x) = \frac{4}{1+e^{-2x}}$ द्वारा परिभाषित हैं। संयुक्त फलन (composite function) $f \circ g^{-1}$ by $(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x))$ द्वारा परिभाषित कीजिए, जहाँ g^{-1}, फलन g का प्रतिलोम (inverse) है।

तब $x = 2$ पर संयुक्त फलन $f \circ g^{-1}$ के अवकलज (derivative) का मान ________ है।

Ans. 0.25

Sol. Let $g^{-1}(x) = h(x)$

$\Rightarrow u(x) = f(h(x)) \qquad \to u'(x) = f'(h(x)).h'(x)$

$u'(2) = f'(h(2))\, h'(2)$

$$h(2) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = 2 \Rightarrow \frac{4}{1+e^{-2\alpha}} = 2 \Rightarrow \alpha = 0$$

$u'(2) = f'(0)\, h'(2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+4}(2x+2) \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

and $\quad h(g(x)) = x$

$\Rightarrow h'(g(x)).g'(x) = 1 \qquad$ Put $\alpha = 0$

$\Rightarrow h'(g(0))\, g'(0) = 1$

$\Rightarrow h'(2)\, g'(0) = 1$

$g(x) = 4(1 + e^{-2x})^{-1} \qquad \Rightarrow g'(x) = -4(1 + e^{-2x})^{-2}\,(e^{-2x})\,(-2)$

$g'(0) = 8(2)^{-2}\,(1) = 2$

$$= u'(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1/4 = 0.25$$

15. Let $\alpha = \frac{1}{\sin 60^\circ \sin 61^\circ} + \frac{1}{\sin 62^\circ \sin 63^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 118^\circ \sin 119^\circ}$. Then the value of $\left(\frac{\operatorname{cosec} 1^\circ}{\alpha}\right)^2$ is ________.

मान लीजिए कि $\alpha = \frac{1}{\sin 60^\circ \sin 61^\circ} + \frac{1}{\sin 62^\circ \sin 63^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 118^\circ \sin 119^\circ}$ है। तब $\left(\frac{\operatorname{cosec} 1^\circ}{\alpha}\right)^2$ का मान ________ है।

Ans. 3

Sol. $(\alpha)\sin 1^\circ = \frac{\sin(61^\circ - 60^\circ)}{\sin 60^\circ \sin 61^\circ} + \frac{\sin(63^\circ - 62^\circ)}{\sin 63^\circ \sin 62^\circ} + \ldots + \frac{\sin(119^\circ - 118^\circ)}{\sin 118^\circ \sin 119^\circ}$

$= (\cot 60^\circ - \cot 61^\circ) + (\cot 62^\circ - \cot 63^\circ) + \ldots\ldots\ldots + (\cot 118^\circ - \cot 119^\circ)$

$119^\circ = 180^\circ - 61^\circ \qquad \Rightarrow \cot 119^\circ = -\cot 61^\circ$

$\Rightarrow (\cot 60^\circ + \cot 119^\circ) + (-\cot 118^\circ + \cot 117^\circ) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (\cot 118^\circ - \cot 119^\circ)$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\cot 60^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$\text{RSH}\left(\frac{\operatorname{cosec} 1^\circ}{\cot 60^\circ}\sin 1^\circ\right)^2 = 3$$

16. If $\alpha = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\tan^{-1} x}{2x^2 - 3x + 2}\,dx$, then the value of $\sqrt{7}\tan\left(\frac{2\alpha\sqrt{7}}{\pi}\right)$ is ________.

(Here, the inverse trigonometric function $\tan^{-1} x$ assumes values in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

. यदि $\alpha = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\tan^{-1} x}{2x^2 - 3x + 2} dx$ है, तब $\sqrt{7} \tan\left(\frac{2\alpha\sqrt{7}}{\pi}\right)$ का मान ________ है।

(यहाँ, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (inverse trigonometric function) $\tan^{-1} x$ के मान $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में हैं।)

Ans. 21

Sol. $\alpha = \int_{1/2}^{2} \frac{\tan^{-1} x}{2x^2 - 3x + 2} dx \quad$ put $x = \frac{1}{y}$

$$\alpha = \int_{2}^{1/2} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y^2}\right) dy}{\frac{2}{y^2} - \frac{3}{y} + 2} = -\int_{2}^{1/2} \frac{\cot^{-1}(y) dy}{2y^2 - 3y + 2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \int_{1/2}^{2} \frac{(\pi/2) dx}{2x^2 - 3x + 2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x^2 - \frac{3x}{2} + 1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \int_{1/2}^{2} \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{x - 3/4}{\sqrt{7}/4}\right)\Bigg|_{1/2}^{2}$$

$$\alpha = \frac{4\pi}{8\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{4x - 3}{\sqrt{7}}\right)_{1/2}^{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{7}} \left(\tan^{-1} \frac{5}{\sqrt{7}} - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{7}} \left(\tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)$$

$$\frac{2\alpha\sqrt{7}}{\pi} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\tan\left(\frac{2\alpha\sqrt{7}}{\pi}\right) = \frac{6/\sqrt{7}}{1-5/7} = \frac{6/\sqrt{7}}{2/7} = 3\sqrt{7}$$

Ans. 21