

JEE Adv. May 2025
Question Paper With Text Solution
18 May | Paper-1

MATHEMATICS



JEE Main & Advanced | XI-XII Foundation | VI-X Pre-Foundation

Office : Piprali Road, Sikar (Raj.) | Ph. 01572-241911
Website : www.matrixedu.in ; Email : smd@matrixacademy.co.in

**SECTION 1 (Maximum Marks: 12)**

- This section contains **FOUR (04)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full Marks : +3 If **ONLY** the correct option is chosen;

Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);

Negative Marks : -1 In all other cases.

1. Let $\mathbb{R}$ denote the set of all real numbers. Let $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ for $i \in \{1, 2, 3\}$.

Define the functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, and $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f(x) = a_1 + 10x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4,$$

$$g(x) = b_1 + 3x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4,$$

$$h(x) = f(x+1) - g(x+2).$$

If $f(x) \neq g(x)$ for every $x \in \mathbb{R}$, then the coefficient of x^3 in $h(x)$ is :

मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) के समुच्चय (set) को दर्शाता है। मान लीजिए कि $i \in \{1, 2, 3\}$ के लिए $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ हैं। फलनों (functions) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, और $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ को

$$f(x) = a_1 + 10x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4,$$

$$g(x) = b_1 + 3x + b_2x^2 + b_3x^3 + x^4,$$

$$h(x) = f(x+1) - g(x+2).$$

द्वारा परिभाषित कीजिए। यदि प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) \neq g(x)$ है, तब $h(x)$ में x^3 का गुणांक (coefficient) है :

(A) 8

(B) 2

(C) -4

(D) -6

Ans. C

Sol. Equation $f(x) = g(x)$ will not have any real solution.

$$(a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + 7x + (a_1 - b_1) = 0$$

$$a_3 = b_3 \text{ \& } 49 - 4(a_2 - b_2)(a_1 - b_1) < 0$$

$$h(x) = a_1 + 10(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + (x+1)^4$$

MATRIX JEE ACADEMY

Office : Piprali Road, Sikar (Raj.) | Ph. 01572-241911

Website : www.matrixedu.in ; Email : smd@matrixacademy.co.in



$$-b_1 - 3(x+2) - b_2(x+2)^2 - b_3(x+2)^3 - (x+2)^4$$

On RHS only $(x+1)^4 - (x+2)^4$ will have term containing x^3

So, coefficient of $x^3 = {}^4C_1 - {}^4C_1(2)$

$$= 4 - 8 = -4$$

2. Three students S_1 , S_2 , and S_3 are given a problem to solve. Consider the following events :

U : At least one of S_1 , S_2 , and S_3 can solve the problem.

V : S_1 can solve the problem, given that neither S_2 nor S_3 can solve the problem.

W : S_2 can solve the problem and S_3 cannot solve the problem,

T : S_3 can solve the problem.

For any event E , let $P(E)$ denote the probability of E . If

$$P(U) = \frac{1}{2}, \quad P(V) = \frac{1}{10}, \quad \text{and} \quad P(W) = \frac{1}{12},$$

then $P(T)$ is equal to

तीन विद्यार्थियों S_1 , S_2 , और S_3 को एक सवाल (problem) हल करने के लिए दिया गया है। निम्नलिखित घटनाओं (events) पर विचार कीजिए :

U : S_1 , S_2 , और S_3 में से कम से कम एक, इस सवाल को हल कर सकता है,

V : S_1 सवाल को हल कर सकता है, जब यह ज्ञात है कि S_2 और S_3 में से कोई भी सवाल हल नहीं कर सकता है,

W : S_2 सवाल को हल कर सकता है और S_3 सवाल को हल नहीं कर सकता है,

T : S_3 सवाल को हल कर सकता है।

किसी घटना E के लिए, मान लीजिए कि $P(E)$, घटना E की प्रायिकता (probability) को दर्शाता है। यदि

$$P(U) = \frac{1}{2}, \quad P(V) = \frac{1}{10}, \quad \text{और} \quad P(W) = \frac{1}{12},$$

हैं, तब $P(T)$ बराबर है :

(A) $\frac{13}{36}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{19}{60}$

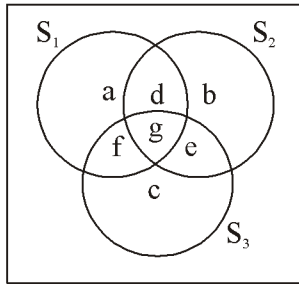
(D) $\frac{1}{4}$

Ans. A

MATRIX JEE ACADEMY

Office : Piprali Road, Sikar (Raj.) | Ph. 01572-241911

Website : www.matrixedu.in ; Email : smd@matrixacademy.co.in

**Sol.**

$$P(U) = \frac{1}{2} = 1 - h$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

$$P(V) = \frac{1}{10} = \frac{a}{a+h}$$

$$\Rightarrow 9a = h$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

$$P(W) = \frac{1}{12} = b + d$$

$$P(T) = c + e + f + g$$

$$= 1 - (a + b + d + h)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) = \frac{13}{36} \quad (A)$$

3. Let $\mathbb{R}$ denote the set of all real numbers. Define the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x^2 - x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0, \\ 2 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Then which of the following statements is TRUE ?

- (A) The function f is **NOT** differentiable at $x = 0$
 (B) There is a positive real number δ , such that f is a decreasing function on the interval $(0, \delta)$
 (C) For any positive real number δ , the function f is **NOT** an increasing function on the interval $(-\delta, 0)$



(D) $x = 0$ is a point of local minima of f

मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) के समुच्चय (set) को दर्शाता है।

फलन (function) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ को :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x^2 - x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{यदि } x \neq 0, \\ 2 & \text{यदि } x = 0. \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित कीजिये। तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा एक कथन सत्य है ?

(A) $x = 0$ पर, फलन f अवकलनीय नहीं है

(B) एक धनात्मक वास्तविक संख्या (positive real number) δ इस प्रकार है कि अंतराल $(0, \delta)$ में फलन f एक ह्रासमान फलन है

(C) किसी भी धनात्मक वास्तविक संख्या δ के लिए अंतराल $(-\delta, 0)$ में फलन f एक वर्धमान फलन नहीं है

(D) $x = 0$, फलन f का एक स्थानीय निम्नतम का बिन्दु है

Ans. B

Sol. Calculate LHD & RHD at $x = 0$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h^2 - h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-h \left(2 + \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right) \right)$$

$$f'(0^+) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \frac{-2h^2 + h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{-h}$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} h \left(2 - \sin \left(\frac{1}{h} \right) \right) = 0$$

In nbd of $x = 0$

$$f'(0^+) < 0 \quad f'(0^-) > 0$$

$\Rightarrow x = 0$ is point of local maxima

f is increasing in left nbd of $x = 0$

f is decreasing in right nbd of $x = 0$

4. Consider the matrix

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Let the transpose of a matrix X be denoted by X^T . Then the number of 3×3 invertible matrices Q with integer entries, such that

$$Q^{-1} = Q^T \quad \text{and} \quad PQ = QP,$$

is :

आव्यूह

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि किसी आव्यूह X के परिवर्त (transpose) को X^T द्वारा दर्शाया जाता है। तब पूर्णांक प्रविष्टियों वाले 3×3 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों Q , जिनके लिए

$$Q^{-1} = Q^T \quad \text{और} \quad PQ = QP,$$

हैं, की संख्या है :

(A) 32

(B) 8

(C) 16

(D) 24

Ans. C



Sol. Let $Q = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$$PQ = QP$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 3c \\ 2d & 2e & 3f \\ 2g & 2h & 3i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c = 0, f = 0, g = 0, h = 0$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$QQ^T = I$$

So Q is orthogonal matrix.

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$$d^2 + e^2 = 1$$

$$ad + be = 0, i^2 = 1$$

$$\text{If } i = 1$$

$$(a, b, d, e) \equiv (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1)$$

$$(0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0)$$

$$(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, -1)$$

$$(0, -1, 1, 0), (0, -1, -1, 0)$$

Total 8 combination

for $i = -1$ total 8 combination

So 16 possible combination

SECTION 2 (Maximum Marks: 12)

- This section contains **THREE (03)** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
 Full Marks : +4 **ONLY** if (all) the correct option(s) is(are) chosen;
 Partial Marks : +3 If all the four options are correct but **ONLY** three options are chosen;
 Partial Marks : +2 If three or more options are correct but **ONLY** two options are chosen, both of which are correct;

MATRIX JEE ACADEMY

Office : Piprali Road, Sikar (Raj.) | Ph. 01572-241911

Website : www.matrixedu.in ; Email : smd@matrixacademy.co.in



Partial Marks : +1 If two or more options are correct but **ONLY** one option is chosen and it is a correct option;

Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);

Negative Marks : -2 In all other cases.

- For example, in a question, if (A), (B) and (D) are the **ONLY** three options corresponding to correct answers, then

choosing ONLY (A), (B) and (D) will get +4 marks;

choosing ONLY (A) and (B) will get +2 marks;

choosing ONLY (A) and (D) will get +2 marks;

choosing ONLY (B) and (D) will get +2 marks;

choosing ONLY (A) will get +1 mark;

choosing ONLY (B) will get +1 mark;

choosing ONLY (D) will get +1 mark;

choosing no option (i.e. the question is unanswered) will get 0 marks; and

choosing any other combination of options will get -2 marks.

5. Let L_1 be the line of intersection of the planes given by the equations

$$2x + 3y + z = 4 \text{ and } x + 2y + z = 5.$$

Let L_2 be the line passing through the point $P(2, -1, 3)$ and parallel to L_1 . Let M denote the plane given by the equation

$$2x + y - 2z = 6.$$

Suppose that the line L_2 meets the plane M at the point Q . Let R be the foot of perpendicular drawn from P to the plane M .

Then which of the following statements is (are) TRUE ?

(A) The length of the line segment PQ is $9\sqrt{3}$

(B) The length of the line segment QR is 15

(C) The area of ΔPQR is $\frac{3}{2}\sqrt{234}$

(D) The acute angle between the line segments PQ and PR is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

मान लीजिए कि L_1 , समीकरणों

$$2x + 3y + z = 4 \text{ और } x + 2y + z = 5.$$

द्वारा दिए गए समतलों की प्रतिच्छेदन रेखा है। मान लीजिए कि L_2 वह रेखा है जो बिन्दु $P(2, -1, 3)$ से गुजरती है और L_1 के समांतर है। मान लीजिए कि M , समीकरण

$$2x + y - 2z = 6$$



द्वारा दिये गये समतल को दर्शाता है। मान लीजिए कि L_2 , समतल M से बिन्दु Q पर मिलती है। मान लीजिए कि P से समतल M पर डाले गए लम्ब का पाद R है।

तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सत्य है (हैं) ?

(A) रेखाखण्ड PQ की लम्बाई $9\sqrt{3}$ है

(B) रेखाखण्ड QR की लम्बाई 15 है

(C) त्रिभुज ΔPQR का क्षेत्रफल $\frac{3}{2}\sqrt{234}$ है

(D) रेखाखण्डों PQ और PR के बीच का न्यूनकोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ है

Ans. AC

Sol. $\vec{P}_1$ = direction vector of L_2

$$\vec{P}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

Equation of L_2

$$\vec{r} = (2, -1, 3) + \lambda(1, -1, 1)$$

$$Q(2 + \lambda, -1 - \lambda, 3 + \lambda)$$

Q will lie on $2x + y - 2z = 6$

$$2(2 + \lambda) + (-1 - \lambda) - 2(3 + 2\lambda) = 6$$

$$\Rightarrow \lambda = -9$$

$$\Rightarrow Q(-7, 8, -6)$$

Equation of PR

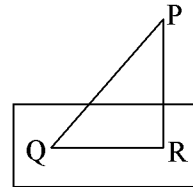
$$\vec{r} = (2, -1, 3) + \mu(2, 1, -2)$$

$$R(2 + 2\mu, -1 + \mu, 3 - 2\mu)$$

R will lie on $2x + y - 2z = 6$

$$2(2 + 2\mu) + (-1 + \mu) - 2(3 - 2\mu) = 6$$

$$\Rightarrow \mu = 1$$





$$\Rightarrow R(4,0,1)$$

$$PQ = 9\sqrt{3} \quad PR = 3 \quad QR = \sqrt{234}$$

ΔPQR is right angled triangle

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(QR)(PR) = \frac{3\sqrt{234}}{2}$$

θ = angle between line PQ & PR

$$\cos \theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{3}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

6. Let N denote the set of all natural numbers, and Z denote the set of all integers. Consider the functions $f: N \rightarrow Z$ and $g: Z \rightarrow N$ defined by

$$f(n) = \begin{cases} \frac{(n+1)}{2} & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{(4-n)}{2} & \text{if } n \text{ is even,} \end{cases}$$

and

$$f(n) = \begin{cases} 3+2n & \text{if } n \geq 0 \\ -2n & \text{if } n < 0 \end{cases}$$

Define $(g \cdot f)(n) = g(f(n))$ for all $n \in N$, and $(f \cdot g)(n) = f(g(n))$ for all $n \in Z$.

Then which of the following statements is (are) TRUE ?

- (A) $g \cdot f$ is **NOT** one-one and $g \cdot f$ is **NOT** onto
 (B) $f \cdot g$ is **NOT** one-one but $f \cdot g$ is onto
 (C) g is one-one and g is onto
 (D) f is **NOT** but f is onto

मान लीजिए कि N सभी प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है, और Z सभी पूर्णाकों के समुच्चय को दर्शाता है। फलनों $f: N \rightarrow Z$ और $g: Z \rightarrow N$ जो

$$f(n) = \begin{cases} \frac{(n+1)}{2} & \text{यदि } n \text{ विषम है,} \\ \frac{(4-n)}{2} & \text{यदि } n \text{ सम है,} \end{cases}$$



और

$$f(n) = \begin{cases} 3 + 2n & \text{यदि } n \geq 0 \text{ है} \\ -2n & \text{यदि } n < 0 \text{ है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित हैं, पर विचार कीजिए। सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए $(g \cdot f)(n) = g(f(n))$, और सभी $n \in \mathbb{Z}$ के लिए $(f \cdot g)(n) = f(g(n))$ परिभाषित कीजिये।

तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सत्य है (हैं) ?

- (A) $g \cdot f$ एकैकी नहीं है और $g \cdot f$ आच्छादक भी नहीं है
 (B) $f \cdot g$ एकैकी नहीं है परंतु $f \cdot g$ आच्छादक है
 (C) g एकैकी है और g आच्छादक भी है
 (D) f एकैकी नहीं है परंतु f आच्छादक है

Ans. AD

Sol. $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n \rightarrow \text{odd} \\ \frac{4-n}{2} & n \rightarrow \text{even} \end{cases} \quad \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$f(1) = 1$

$f(5) = 3$

$f(2) = 1$

$f(6) = -1$

not one-one and onto

$f(3) = 2$

$f(7) = 4$

$f(4) = 0$

$f(8) = -2$

$$g(n) = \begin{cases} 3 + 2n, & n \geq 0 \\ -2n, & n < 0 \end{cases}$$

$g(0) = 3$

$g(-1) = 2$

$g(1) = 5$

$g(-2) = 4$

not one-one and into

$g(2) = 7$

$g(-3) = 6$

$g(3) = 9$

$g(-4) = 8$

$f \circ g(x)$

$-4 \Rightarrow -2$

$-3 \Rightarrow -1$



$-2 \Rightarrow 0$

$-1 \Rightarrow 1$

one-one and onto

$0 \Rightarrow 2$

$1 \Rightarrow 3$

$2 \Rightarrow 4$

$3 \Rightarrow 5$

$\text{gof}(x)$

$1 \Rightarrow 5$

$2 \Rightarrow 5$

$3 \Rightarrow 7$

$4 \Rightarrow 3$

$5 \Rightarrow 9$

$6 \Rightarrow 2$

$7 \Rightarrow 11$

$8 \Rightarrow 4$

not one-one and into

7. Let $\mathbb{R}$ denote the set of all real numbers. Let $z_1 = 1 + 2i$ and $z_2 = 3i$ be two complex numbers, where $i = \sqrt{-1}$. Let

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x + iy - z_1| = 2|x + iy - z_2|\}.$$

The which of the following statements is (are) TRUE ?

(A) S is a circle with centre $\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

(B) S is a circle with centre $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$



(C) S is a circle with radius $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(D) S is a circle with radius $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

मान लीजिए कि R सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है। मान लीजिए कि $z_1 = 1 + 2i$ और $z_2 = 3i$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। मान लीजिए कि

$$S = \{(x, y) \in R \times R : |x + iy - z_1| = 2|x + iy - z_2|\}.$$

है।

तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सत्य है (हैं) ?

(A) S एक वृत्त है, जिसका केन्द्र $\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$ है

(B) S एक वृत्त है, जिसका केन्द्र $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ है

(C) S एक वृत्त है, जिसकी त्रिज्या $\frac{\sqrt{2}}{3}$ है

(D) S एक वृत्त है, जिसकी त्रिज्या $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ है

Ans. AD

Sol. $|x + iy - (1 + 2i)| = 2|x + iy - 3i|$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4(x^2 + (y - 3)^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 4x^2 + 4y^2 - 24y + 36$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2x - 20y + 31 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{20}{3}y + \frac{31}{3} = 0$$

$$\text{Centre} \left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3} \right)$$



$$\text{radius} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{100}{9} - \frac{31}{3}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

SECTION 3 (Maximum Marks: 24)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the onscreen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
Full Marks : +4 If **ONLY** the correct integer is entered;
Zero Marks : 0 In all other cases.

8. Let the set of all relations R on the set $\{a, b, c, d, e, f\}$, such that R is reflexive and symmetric, and R contains exactly 10 elements, be denoted by S .

Then the number of elements in S is _____.

मान लीजिए कि समुच्चय $\{a, b, c, d, e, f\}$ पर उन सभी संबंधों R , जो स्वतुल्य और सममित हैं, तथा जिनमें ठीक 10 अवयव हैं, के समुच्चय को S से दर्शाया जाता है।

तब S में अवयवों की संख्या _____ है।

Ans. 105

Sol. 6 elements will be $\Rightarrow (a, a), (b, b), \dots, (f, f)$

4 elements will be from $\Rightarrow (a, b), (a, c), \dots, e, f$

(${}^6C_2 = 15$ elements)

So, selection of 2 out of 15 = ${}^{15}C_2 = 105$

9. For any two points M and N in the XY -plane, let $\overrightarrow{MN}$ denote the vector from M to N , and $\vec{0}$ denote the zero vector. Let P, Q and R be three distinct points in the XY -plane. Let S be a point inside the triangle ΔPQR such that

$$\overrightarrow{SP} + 5\overrightarrow{SQ} + 6\overrightarrow{SR} = \vec{0}.$$

Let E and F be the mid-points of the sides PR and QR , respectively. Then the value of

$\frac{\text{length of the line segment } EF}{\text{length of the line segment } ES}$

is _____.



मान लीजिए कि XY -तल में किन्हीं दो बिन्दुओं M और N के लिए, M से N तक के सदिश को $\overrightarrow{MN}$ से दर्शाया जाता है, तथा शून्य सदिश को $\vec{0}$ से दर्शाया जाता है। मान लीजिए कि XY -तल में P, Q और R , तीन भिन्न बिन्दु हैं।

एक y हूँ, fd S , त्रिभुज ΔPQR के आंतरिक भाग में इस प्रकार का एक बिन्दु है कि

$$\overrightarrow{SP} + 5\overrightarrow{SQ} + 6\overrightarrow{SR} = \vec{0}.$$

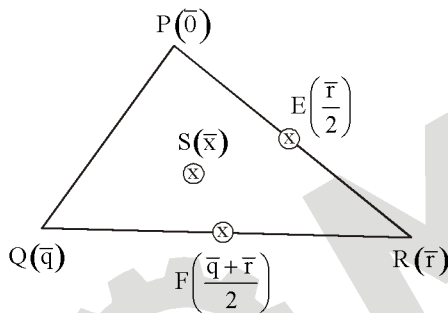
है। मान लीजिए कि E और F , क्रमशः PR और QR के मध्य बिन्दु हैं। तब

$\frac{\text{रेखाखण्ड } EF \text{ की लम्बाई}}{\text{रेखाखण्ड } ES \text{ की लम्बाई}}$

का मान _____ है।

Ans. 1.2

Sol.



$$\overrightarrow{SP} + 5\overrightarrow{SQ} + 6\overrightarrow{SR} = \vec{0}$$

$$0 - \vec{x} + 5(\vec{q} - \vec{x}) + 6(\vec{r} - \vec{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{5\vec{q} + 6\vec{r}}{12}$$

$$\text{So } \overline{EF} = \frac{q}{2}$$

$$\text{and } \overline{ES} = \frac{5q}{12}$$



$$\Rightarrow \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{ES}|} = \frac{\left| \frac{q}{2} \right|}{\left| \frac{5q}{12} \right|} = \frac{6}{5} = 1.2$$

10. Let S be the set of all seven-digit numbers that can be formed using the digits 0, 1 and 2. For example, 2210222 is in S , but 0210222 is **NOT** in S .

Then the number of elements x in S such that at least one of the digits 0 and 1 appears exactly twice in x , is equal to _____.

मान लीजिए कि S , उन सभी सात अंकों वाली संख्याओं का समुच्चय है जो अंकों 0, 1 और 2 से बनायी जा सकती हैं। उदाहरण के लिए, S में संख्या 2210222 है, परंतु S में संख्या 0210222 नहीं है।

तब S में ऐसे सभी अवयवों x , जिसमें अंकों 0 और 1 में से कम से कम एक अंक ठीक दो बार आता है, की संख्या _____ है।

Ans. 762

Sol. No. of elements = (0 exactly 2 times) + (1 exactly 2 times) – (0 and 1 both exactly 2 times)

C-I : 0 exactly 2 times

$${}^6C_2 \cdot 2^5 = 15 \times 32 = 480$$

C-II : 1 exactly 2 times

$$1 \text{ _____} + 2 \text{ _____}$$

$${}^6C_1 \cdot 2^5 = 32 \times 6 \quad {}^6C_2 \cdot 2^4 = 15 \times 16$$

$$= 16 \times 12$$

$$\text{Total} = 27 \times 16 = 432$$

C-III : 0 and 1 both exactly 2 times

$$1 \text{ _____} + 2 \text{ _____}$$

$$({}^6C_3 \cdot {}^3C_1) \cdot 1 = 60 \quad \left({}^6C_4 \cdot \frac{4!}{2!2!} \right) \cdot 1 = 90 \quad \text{Total} = 150$$

$$\text{So, no. of elements in } S = 480 + 432 - 150 = 762$$

11. Let α and β be the real numbers such that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{\alpha}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt + \beta x \cos x \right) = 2.$$



Then the value $\alpha + \beta$ is _____.

मान लीजिए कि α और β वह वास्तविक संख्याएँ हैं कि

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{\alpha}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt + \beta x \cos x \right) = 2.$$

है। तब $\alpha + \beta$ का मान है _____.

Ans. 2.4

Sol.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\frac{\alpha}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt + \beta x \cos x \right] = 2$$

Apply L-H Rule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\alpha}{2(1-x^2)} + \beta(\cos x - x \sin x) \right]}{3x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha + \beta \times 2(1-x^2)(\cos x - x \sin x)}{2(1-x^2) \cdot 3x^2} \right] = 2$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha + (2\beta - 2\beta x^2)(\cos x - x \sin x)}{x^2} \right] = 2$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\alpha + 2\beta \cos x - 2\beta x \sin x - 2\beta x^2 \cos x + 2\beta x^3 \sin x]}{x^2} = 2$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\alpha + 2\beta \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \right] - 2\beta x \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) - 2\beta x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} \right) + 2\beta x^4}{x^2} = 2$$

$$\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[(\alpha + 2\beta) + x^2[-\beta - 2\beta - 2\beta] + x^4 \left(\frac{2\beta}{4!} + \frac{2\beta}{3!} + \frac{2\beta}{2!} + 2\beta \right) \right]}{x^2} = 2$$



$$\alpha + 2\beta = 0 \quad \text{and} \quad -\frac{5\beta}{6} = 2$$

$$\beta = -\frac{12}{5}$$

$$\alpha = -2\beta$$

$$= -2\left(-\frac{12}{5}\right)$$

$$= \frac{24}{5}$$

$$\alpha + \beta = \frac{24}{5} - \frac{12}{5}$$

$$= \frac{12}{5} = 2.4$$

12. Let T denote the set of all real numbers. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function such that $f(x) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, and $f(x+y) = f(x)f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$.

Let the real numbers $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ be in an arithmetic progression. If $f(a_{31}) = 64f(a_{25})$, and $\sum_{i=1}^{50} f(a_i) = 3(2^{25} + 1)$,

then the value of $\sum_{i=6}^{30} f(a_i)$ is _____.

मान लीजिए कि $\mathbb{R}$ सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है। मान लीजिए कि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक इस प्रकार का फलन है कि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) > 0$ है, और सभी $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x+y) = f(x)f(y)$ है।

मान लीजिए कि वास्तविक संख्याएँ $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ एक समांतर श्रेणी में हैं। यदि $f(a_{31}) = 64f(a_{25})$ है, और

$$\sum_{i=1}^{50} f(a_i) = 3(2^{25} + 1), \text{ है, तब } \sum_{i=6}^{30} f(a_i)$$

का मान _____ है।

Ans. 96

Sol. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = a^{\lambda x}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Now $a_1, a_2, \dots, a_{30} \rightarrow \text{A.P.}$

$$f(a_{31}) = 64 f(a_{25})$$

$$a^{\lambda(A+30D)} = 64 a^{\lambda(A+24D)}$$

$$a^{\lambda A} \cdot a^{30\lambda D} = 64 a^{\lambda A} \cdot a^{24\lambda D}$$

$$a^{6\lambda D} = 64 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Again } 6a^{6\lambda D} = 2^6 \Rightarrow a = 2; \lambda D = 1$$

$$f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \dots + f(a_{30}) = 3(2^{25} + 1)$$

$$a^{\lambda A} + a^{\lambda(A+D)} + a^{\lambda(A+2D)} + \dots + a^{\lambda(A+29D)} = 3(2^{25} + 1)$$

$$a^{\lambda A} (1 + a^{\lambda D} + a^{2\lambda D} + \dots + a^{29\lambda D}) = 3(2^{25} + 1)$$

$$a^{\lambda A} \left\{ \frac{1 - (a^{\lambda D})^{30}}{1 - a^{\lambda D}} \right\} = 3(2^{25} + 1)$$

$$2^{\lambda A} \left\{ \frac{1 - (2)^{30}}{1 - 2} \right\} = 3(2^{25} + 1)$$

$$2^{\lambda A} \{ (2^{25} - 1)(2^{25} + 1) \} = 3(2^{25} + 1)$$

$$2^{\lambda A} (2^{25} - 1) = 3$$

$$2^{\lambda A} = \frac{3}{2^{25} - 1}$$

$$\sum_{i=6}^{30} f(a_i) = f(a_6) + f(a_7) + \dots + f(a_{30})$$

$$= a^{\lambda(A+5D)} + a^{\lambda(A+6D)} + \dots + a^{\lambda(A+29D)}$$

$$= a^{\lambda A} \{ a^{5\lambda D} + a^{6\lambda D} + \dots + a^{29\lambda D} \}$$

$$= 2^{\lambda A} \{ 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{29} \}$$



$$\Rightarrow 2^{\lambda_A} \left\{ \frac{2^5 (1 - 2^{25})}{1 - 2} \right\}$$

$$\frac{3}{2^{25} - 1} \times \frac{2^5 (2^{25} - 1)}{1}$$

$$= 32 \times 3$$

$$= 96$$

13. For all $x > 0$, let $y_1(x)$, $y_2(x)$ and $y_3(x)$ be the functions satisfying

$$\frac{dy_1}{dx} - (\sin x)^2 y_1 = 0, y_1(1) = 5,$$

$$\frac{dy_2}{dx} - (\cos x)^2 y_2 = 0, y_2(1) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{dy_3}{dx} - \left(\frac{2 - x^3}{x^3} \right) y_3 = 0, y_3(1) = \frac{3}{5e},$$

respectively. Then

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_1(x) y_2(x) y_3(x) + 2x}{e^{3x} \sin x}$$

is equal to _____.

सभी $x > 0$ के लिए, मान लीजिए कि $y_1(x)$, $y_2(x)$ और $y_3(x)$ इस प्रकार के फलन हैं जो क्रमशः

$$\frac{dy_1}{dx} - (\sin x)^2 y_1 = 0, y_1(1) = 5,$$

$$\frac{dy_2}{dx} - (\cos x)^2 y_2 = 0, y_2(1) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{dy_3}{dx} - \left(\frac{2 - x^3}{x^3} \right) y_3 = 0, y_3(1) = \frac{3}{5e},$$



को संतुष्ट करते हैं। तब

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_1(x)y_2(x)y_3(x) + 2x}{e^{3x} \sin x}$$

बराबर _____ है।

Ans. 2

Sol. $\frac{dy_1}{dx} - (\sin x)^2 y_1 = 0$

$$P = -\sin^2 x; Q = 0$$

$$\text{I.F.} = e^{-\int \sin^2 x dx}$$

$$= e^{-\int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx}$$

$$= e^{-\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}}$$

$$y_1 \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}} = c_1$$

$$y_1 = c_1 e^{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}}$$

$$5 = c_1 e^{\frac{1}{2} - \frac{\sin 2}{4}}$$

$$c_1 = 5 e^{\frac{\sin 2}{4} - \frac{1}{2}}$$

$$y_1 = 5 e^{\frac{\sin 2 - 2}{4}} \cdot e^{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}} \dots\dots\dots (A)$$

$$\frac{dy_2}{dx} - \cos^2 x \cdot y_2 = 0$$

$$P = -\cos^2 x \quad Q = 0$$

$$\text{I.F.} = e^{-\int \cos^2 x dx}$$

$$= e^{-\int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx}$$



$$= e^{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}}$$

$$= e^{\frac{2x - \sin 2x}{4}}$$

$$y_2 e^{\frac{2x - \sin 2x}{4}} = c_2$$

$$\frac{1}{3} e^{\frac{-2 - \sin 2}{4}} = c_2$$

$$\therefore y_2 = \frac{1}{3} e^{\frac{-2 + \sin 2}{4}} \cdot e^{\frac{2x + \sin 2x}{4}} \dots\dots\dots (B)$$

$$\frac{dy_3}{dx} - \left(\frac{2 - x^3}{x^3} \right) y_3 = 0$$

$$P = \frac{x^3 - 2}{x^3} \quad Q = 0$$

$$= 1 - \frac{2}{x^3}$$

$$I.F = e^{\int \left(1 - \frac{2}{x^3} \right) dx}$$

$$= e^{\frac{2 \cdot x^{-2}}{-2} + 2}$$

$$= e^{x + \frac{1}{x^2}}$$

$$y \cdot e^{x + \frac{1}{x^2}} = c_3$$

$$\frac{3}{5} e^2 = c_3$$

$$\therefore y_3 = \frac{3}{5} e^{\left(x + \frac{1}{x^2} \right)}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5e^{\frac{\sin 2 - 2}{4}} \cdot e^{\frac{x - \sin 2x}{2}} \cdot \frac{1}{3} e^{\frac{2 - \sin 2}{4}} \cdot e^{\frac{2x + \sin 2x}{4}} \cdot \frac{3}{5} e \cdot e^{-x - \frac{1}{x^2}} + 2x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1+1} \cdot e^{x-x-\frac{1}{x^2}} + 2x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} + 2x}{\sin x}$$

$\Rightarrow 2$ Ans.

SECTION 4 (Maximum Marks: 12)

- This section contains **THREE (03)** Matching List Sets.
- Each set has **ONE** Multiple Choice Question.
- Each set has **TWO** lists: **List-I** and **List-II**.
- **List-I** has Four entries (P), (Q), (R) and (S) and **List-II** has **Five** entries (1), (2), (3), (4) and (5).
- **FOUR** options are given in each Multiple Choice Question based on **List-I** and **List-II** and **ONLY ONE** of these four options satisfies the condition asked in the Multiple Choice Question.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:
 Full Marks : +4 **ONLY** if the option corresponding to the correct combination is chosen;
 Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
 Negative Marks : -1 In all other cases.

14. Consider the following frequency distribution :

Value	4	5	8	9	6	12	11
Frequency	5	f_1	f_2	2	1	1	3

Suppose that the sum of the frequencies is 19 and the median of this frequency distribution is 6.

For the given frequency distribution, let α denote the mean deviation about the mean, β denote the mean deviation about the median, and σ^2 denote the variance.

Match each entry in List-I to the correct entry in List-II and choose the correct option.

List-I

- (P) $7f_1 + 9f_2$ is equal to
 (Q) 19α is equal to
 (R) 19β is equal to
 (S) $19\sigma^2$ is equal to

List-II

- (1) 146
 (2) 47
 (3) 48
 (4) 145
 (5) 55

The correct option is :

MATRIX JEE ACADEMY

Office : Piprali Road, Sikar (Raj.) | Ph. 01572-241911

Website : www.matrixedu.in ; Email : smd@matrixacademy.co.in



निम्नलिखित बारंबारता बंटन पर विचार कीजिए :

मान	4	5	8	9	6	12	11
बारंबारता	5	f_1	f_2	2	1	1	3

मान लीजिए कि बारंबारताओं का योग 19 है और बारंबारता बंटन की माध्यिका 6 है।

f_n ; α ; β मान लीजिए कि α माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन को दर्शाता है, β माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन को दर्शाता है, और σ^2 प्रसरण को दर्शाता है।

सूची-I की प्रत्येक प्रविष्टि का सूची-II की सही प्रविष्टि से मिलान कीजिए और सही विकल्प का चयन करें।

सूची-I

- (P) $7f_1 + 9f_2$ बराबर
 (Q) 19α बराबर
 (R) 19β बराबर
 (S) $19\sigma^2$ बराबर

सूची-II

- (1) 146
 (2) 47
 (3) 48
 (4) 145
 (5) 55

सही विकल्प है :

- (A) (P) $\rightarrow$ (5); (Q) $\rightarrow$ (3); (R) $\rightarrow$ (2); (S) $\rightarrow$ (4)
 (B) (P) $\rightarrow$ (5); (Q) $\rightarrow$ (2); (R) $\rightarrow$ (3); (S) $\rightarrow$ (1)
 (C) (P) $\rightarrow$ (5); (Q) $\rightarrow$ (3); (R) $\rightarrow$ (2); (S) $\rightarrow$ (1)
 (D) (P) $\rightarrow$ (3); (Q) $\rightarrow$ (2); (R) $\rightarrow$ (5); (S) $\rightarrow$ (4)

Ans. C

Sol.	Values	f_i	c.f	$f_i x_i$
	4	5	5	20
	5	f_1	$5 + f_1$	$5f_1$
	6	1	$6 + f_1$	6
	8	f_2	$6 + f_1 + f_2$	$8f_2$
	9	2	$8 + f_1 + f_2$	18
	11	3	$11 + f_1 + f_2$	33
	12	1	$12 + f_1 + f_2$	12

$$\Sigma = 12 + f_1 + f_2$$

$$\Sigma f_i x_i = 133$$

Given $12 + f_1 + f_2 = 19$

$$f_1 + f_2 = 7$$



Median = 6

$$\left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ term} = \left(\frac{19+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{ term} = 10^{\text{th}} \text{ term}$$

Now As Mid value is 6

$$5 + f_1 = 9 \quad \& \quad f_2 + 2 + 3 + 1 = 9$$

$$f_1 = 4 \quad f_2 = 3$$

$$(P) 7f_1 + 9f_2$$

$$\Rightarrow 7 \times 4 + 9 \times 3 \quad P \rightarrow (5)$$

$$\Rightarrow 28 + 27 \Rightarrow 55$$

(Q) α [Mean deviation About mean]

$$\frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{133}{19} = 7$$

$$\text{Now } \alpha = \frac{5 \times 3 + 4 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 1 \times 5}{19}$$

$$= \frac{48}{19} \quad Q \rightarrow (3)$$

$$19\alpha = 48$$

(R) β [Mean deviation About median]

$$= \frac{\sum f_i |x_i - M|}{\sum f_i}$$

$$= \frac{5 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 1 \times 6}{19}$$

$$= \frac{47}{19} \quad R \rightarrow (2)$$

$$19\beta = 47$$

(S) σ^2 (Variance)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum f_1 x_i^2}{\sum f_1} - (\bar{x})^2 \\
 &= \frac{5 \times 16 + 4 \times 25 + 1 \times 36 + 3 \times 64 + 2 \times 81 + 3 \times 121 + 1 \times 144}{19} - 7^2 \\
 &= \frac{1077}{19} - 49 \\
 &= \frac{146}{19} \qquad S \rightarrow (1)
 \end{aligned}$$

15. Let R denote the set of all real numbers. For a real number x , let $[x]$ denote the greatest integer less than or equal to x . Let n denote a natural number.

Match each entry in **List-I** to the correct entry in **List-II** and choose the correct option.

List-I**List-II**

(P) The minimum value of n for which the function

(1) 8

$$f(x) = \left[\frac{10x^3 - 45x^2 + 60x + 35}{n} \right] \text{ is continuous on the interval } [1, 2], \text{ is}$$

(Q) The minimum value of n for which $g(x) = (2n^2 - 13n - 15)(x^3 + 3x)$, (2) 9

$x \in R$, is an increasing function on R , is

(R) The smallest natural number n which is greater than 5, such that (3) 5

$x = 3$ is a point of local minima of $h(x) = (x^2 - 9)^n(x^2 + 2x + 3)$, is

(S) Number of $x_0 \in R$ such that (4) 6

$$I(x) = \sum_{k=0}^4 \left(\sin |x - k| + \cos \left| x - k + \frac{1}{2} \right| \right) \quad x \in R, \text{ is NOT differentiable}$$

at x_0 , is

(5) 10

The correct option is :

मान लीजिए कि R सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है। किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए, मान लीजिए कि x से छोटा या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को $[x]$ से दर्शाते हैं। मान लीजिए कि n एक प्राकृत संख्या को दर्शाता है।

सूची-I की प्रत्येक प्रविष्टि का **सूची-II** की सही प्रविष्टि से मिलान कीजिये और सही विकल्प का चयन करें।

**सूची-I**(P) n का न्यूनतम मान, जिसके लिए अंतराल $[1, 2]$ में फलन

$$f(x) = \left\lfloor \frac{10x^3 - 45x^2 + 60x + 35}{n} \right\rfloor \text{ संतत है, है}$$

(Q) n का न्यूनतम मान जिसके लिए, R पर, $g(x) = (2n^2 - 13n - 15)(x^3 + 3x)$, (2) 9 $x \in R$, कएक वर्धमान फलन है, है(R) सबसे छोटी प्राकृत संख्या n , जो 5 से अधिक है और जिसके लिए, $x = 3$ (3) 5 $h(x) = (x^2 - 9)^n (x^2 + 2x + 3)$ का एक स्थानीय निम्नतम का बिन्दु है, है(S) ऐसे सभी $x_0 \in R$ की संख्या, कि x_0 पर (4) 6

$$I(x) = \sum_{k=0}^4 \left(\sin |x - k| + \cos \left| x - k + \frac{1}{2} \right| \right) \quad x \in R, \text{ अवकलनीय नहीं है, है}$$

(5) 10

सही विकल्प है :

(A) (P) $\rightarrow$ (1); (Q) $\rightarrow$ (3); (R) $\rightarrow$ (2); (S) $\rightarrow$ (5)(B) (P) $\rightarrow$ (2); (Q) $\rightarrow$ (1); (R) $\rightarrow$ (4); (S) $\rightarrow$ (3)(C) (P) $\rightarrow$ (5); (Q) $\rightarrow$ (1); (R) $\rightarrow$ (4); (S) $\rightarrow$ (3)(D) (P) $\rightarrow$ (2); (Q) $\rightarrow$ (3); (R) $\rightarrow$ (1); (S) $\rightarrow$ (5)**Ans. B**

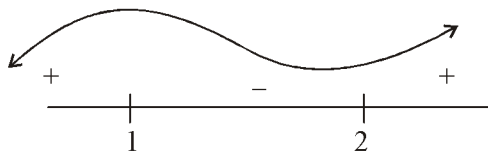
Sol. (P) $f(x) = \left\lfloor \frac{10x^3 - 45x^2 + 60x + 35}{n} \right\rfloor$

$$\text{Let } g(x) = 10x^3 - 45x^2 + 60x + 35$$

$$g'(x) = 30x^2 - 90x + 60$$

$$= 30(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 30(x-1)(x-2)$$

 $g(x)$ $\downarrow$ ing is $[1, 2]$

$$f(1) = \left\lfloor \frac{g(1)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10 - 45 + 60 + 35}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{60}{n} \right\rfloor$$



$$f(2) = \left\lfloor \frac{g(2)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{55}{n} \right\rfloor$$

for $n = 9$ both $f(1) = f(2) = 6$

$P \rightarrow 2$

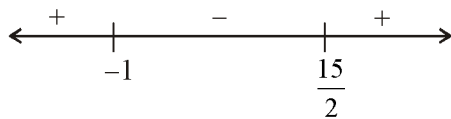
$$(Q) \quad g(x) = (2n^2 - 13n - 15)(x^3 + 3x)$$

$$g'(x) = (2n^2 - 13n - 15)(3x^2 + 3)$$

$$= (2n^2 - 15n + 2n - 15)(3x^2 + 3)$$

$$= \{n(2n - 15) + (2n - 15)\}(3x^2 + 3)$$

$$= (n + 1)(2n - 15)(3x^2 + 3)$$



for $g(x)$ to be $\uparrow$ ing minimum $n \rightarrow 1$

$$(R) \quad h(x) = (x^2 - 9)^n (x^2 + 2x + 3)$$

$$h(3) = 0, \text{ for } n > 5 \text{ at } n = 6$$

$$h(3 + \delta) > h(3) \text{ \& } h(3 - \delta) > h(3)$$

$\rightarrow h(x)$ has local minima at $x = 3$ for $n = 6$

$R \rightarrow 4$

$$(S) \quad \ell(x) = \sum_{k=0}^4 \sin |x - k| + \cos \left| x - k + \frac{i}{2} \right|$$

$$= \sin |x| + \cos \left| x + \frac{1}{2} \right| + \sin |x - 1| + \cos \left| x - \frac{1}{2} \right| + \dots + \sin |x - 4| + \cos \left| x - \frac{7}{2} \right|$$

As $\sin |x - \alpha|$ is Non Diff at $x = \alpha$

But $\cos |x - \alpha|$ is diff at $x = \alpha$

$\Rightarrow \ell(x)$ Non Diff at $x = 0, 1, 2, 3, 4$ (5 Points)

$S \rightarrow 3$



16. Let $\vec{w} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, and $\vec{u}$ and $\vec{v}$ be two vectors, such that $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ and $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}$. Let α, β, γ , and t be real numbers such that $\vec{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$, $-\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha - t\beta + \gamma = 0$, and $\alpha + \beta - t\gamma = 0$.

Match each entry in **List-I** to the correct entry in **List-II** and choose the correct option.

List-I**List-II**

- | | |
|--|-------|
| (P) $ \vec{v} ^2$ is equal to | (1) 0 |
| (Q) If $\alpha = \sqrt{3}$, then γ^2 is equal to | (2) 1 |
| (R) If $\alpha = \sqrt{3}$, then $(\beta + \gamma)^2$ is equal to | (3) 2 |
| (S) If $\alpha = \sqrt{2}$, then $t + 3$ is equal to | (4) 3 |
| | (5) 5 |

The correct option is :

मान लीजिए कि $\vec{w} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ है, तथा $\vec{u}$ और $\vec{v}$ दो इस प्रकार के सदिश हैं कि $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ और $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}$ हैं। मान लीजिए कि α, β, γ , और t इस प्रकार की वास्तविक संख्याएँ हैं कि $\vec{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$, $-\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha - t\beta + \gamma = 0$, और $\alpha + \beta - t\gamma = 0$ हैं।

सूची-I की प्रत्येक प्रविष्टि का सूची-II की सही प्रविष्टि से मिलान कीजिए और सही विकल्प का चयन करें।

सूची-I**सूची-II**

- | | |
|---|-------|
| (P) $ \vec{v} ^2$ बराबर | (1) 0 |
| (Q) यदि $\alpha = \sqrt{3}$ है, तब γ^2 बराबर | (2) 1 |
| (R) यदि $\alpha = \sqrt{3}$ है, तब $(\beta + \gamma)^2$ बराबर | (3) 2 |
| (S) यदि $\alpha = \sqrt{2}$ है, तब $t + 3$ बराबर | (4) 3 |
| | (5) 5 |

The correct option is :

- (A) (P) $\rightarrow$ (2); (Q) $\rightarrow$ (1); (R) $\rightarrow$ (4); (S) $\rightarrow$ (5)
 (B) (P) $\rightarrow$ (2); (Q) $\rightarrow$ (4); (R) $\rightarrow$ (3); (S) $\rightarrow$ (5)
 (C) (P) $\rightarrow$ (2); (Q) $\rightarrow$ (1); (R) $\rightarrow$ (4); (S) $\rightarrow$ (3)
 (D) (P) $\rightarrow$ (5); (Q) $\rightarrow$ (4); (R) $\rightarrow$ (1); (S) $\rightarrow$ (3)

Ans. A

Sol. $\vec{w} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \text{ \& \& } \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}$$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ are mutually $\perp$ r.

Now, $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}$



$$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

$$(|\vec{v}|^2 - 1)\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{v}|^2 - 1 = 0 \text{ \& } \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{v}|^2 = 1 \quad \therefore \text{Angle bet } \vec{w} \text{ \& } \vec{v} \text{ is } 90^\circ$$

$$P \rightarrow 2$$

$$\text{Again } \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{u}|$$

$$|\vec{v}||\vec{w}|\sin 90^\circ = |\vec{u}|$$

$$1 \cdot \sqrt{1+1+4} = |\vec{u}|$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{6}$$

$$\text{and } \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\alpha + \beta - 2\gamma = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 8 - t\alpha + \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots(1) \\ \alpha - t\beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots(2) \\ \alpha + \beta - t\gamma = 0 \dots\dots\dots(3) \end{array} \right\} \text{ Given}$$

$$(ii) - (i) \Rightarrow \alpha(1+t) = (t+1)\beta$$

$$(iii) - (ii) \Rightarrow \beta(1+t) = (1+t)\gamma$$

$$\therefore \alpha(1+t) = (t+1)\beta = (1+t)\gamma$$

$$\Rightarrow t = -1 \text{ or } \alpha = \beta = \gamma$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{6}$$

$$\alpha = \sqrt{2}, -t\alpha = -\alpha - \alpha$$

$$t = 2$$

$$\text{since } \alpha = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow t = -1$$



$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha + \beta - 2\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$Q \rightarrow 1$$

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta + \gamma = -\alpha$$

$$(\beta + \gamma)^2 = \alpha^2$$

$$= 3$$

$$R \rightarrow 4$$

$$(S) \text{ If } \alpha = \sqrt{2}; t = 2$$

$$t + 3 = 5$$

$$S \rightarrow 5$$

