PART III : MATHEMATICS

SECTION-I (Maximum Marks : 21)

- **This section contains SEVEN Questions**
- **Each question has FOUR option [A], [B], [C] and [D]. ONLY ONE of these four options is correct.**
- **For each question, darken the bubble corresponding to the correct option in the ORS**
- **For each question, marks will be awarded in one of the following categories.**
- **Full Marks : +3 If only the bubble corresponding to the correct option is darkened**

Zero Marks : 0 If none of the bubbles is darkened

Negative Marks : –1 In all other cases

1. For any positive integer n, define $f_n : (0, \infty) \to R$ as

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+(x+j)(x+j-1)}\right) \text{ for all } x \in (0, \infty).$$

(Here, the inverse trigonometric function $\tan^{-1}x$ assumes values in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE?

(A) $\sum_{j=1}^{5} \tan^2\left(f_j(0)\right) = 55$

(B) $\sum_{j=1}^{10}\left(1+f_j'(0)\right)\sec^2\left(f_j(0)\right) = 10$

(C) For any fixed positive integer n, $\lim_{x\to\infty} \tan\left(f_n(x)\right) = \frac{1}{n}$

(D) For any fixed positive integer n, $\lim_{x\to\infty} \sec^2\left(f_n(x)\right) = 1$

किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिये, $f_n : (0, \infty) \to R$,

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+(x+j)(x+j-1)}\right) \text{ सभी } x \in (0, \infty) \text{ के लिये,}$$

($\tan^{-1}x$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में मान धारण करता है।) तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) द

(A) $\sum_{j=1}^{5} \tan^2\left(f_j(0)\right) = 55$

(B) $\sum_{j=1}^{10}\left(1+f_j'(0)\right)\sec^2\left(f_j(0)\right) = 10$

(C) किसी भी नियत धनात्मक पूर्णांक n के लिये, $\lim_{x\to\infty} \tan\left(f_n(x)\right) = \frac{1}{n}$

(D) किसी भी नियत धनात्मक पूर्णांक n के लिये, $\lim_{x\to\infty} \sec^2\left(f_n(x)\right) = 1$

Sol. $f_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{1+(x+j)(x+j-1)}\right)$

$f_n(x)=\tan^{-1}(x+n)-\tan^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad f'_n(x)=\frac{1}{1+(x+n)^2}-\frac{1}{1+x^2}$

$f_n(0)=\tan^{-1}(n) \quad \Rightarrow \quad \tan^2(\tan^{-1}n)=n^2$

(A) Zero is not in domain

(B) Zero is not in domain

for option C & D

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x)=\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}\left(\frac{n}{1+x(n+x)}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\tan(f_n(x))=0 \quad \& \quad \lim_{x\to\infty}\sec^2(f_n(x))=1$$

2 Let T be the line passing through the points P(–2, 7) and (2, –5). Let F_1 be the set of all pairs of circles (S_1, S_2) such that T is tangent to S_1 at P, and tangent to S_2 at Q, and also such that S_1 and S_2 touch each other at a point, say, M. Let E_1 be the set representing the locus of M as the pair (S_1, S_2) varies in F_1. Let the set of all straight line segments joining a pair of distinct points of E_1 and passing through the point R(1, 1) be F_2. Let E_2 be the set of the mid-points of the line segments in the set F_2. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE?

(A) The point (–2, 7) lies in E_1 (B) The point (4/5, 7/5) does NOT lie in E_2

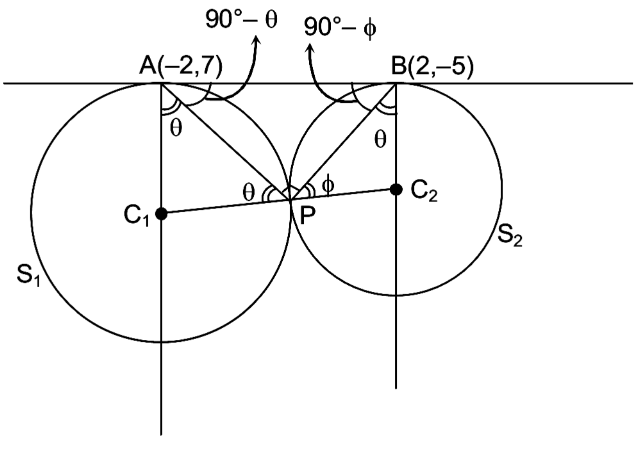
(C) The point (1/2, 1) lies in E_2 (D) The point (0, 3/2) does NOT lie in E_1

माना कि T, बिन्दुओं P(–2, 7) और Q(2, –5) से गुजरने वाली रेखा है। माना कि F_1 उन सभी वृत्त युग्मों (S_1, S_2) का समुच्चय है कि रेखा T, S_1 के बिन्दु P पर और S_2 के बिन्दु Q पर स्पर्शी है तथा वृत्त S_1 व S_2 एक दूसरे को बिन्दु, माना कि M, पर स्पर्श करते हैं। जब युग्म (S_1, S_2), F_1 में विचरित करता है तो माना कि समुच्चय E_1, बिन्दु M के बिन्दुपथ को दर्शाता है। माना कि F_2 उन सरल रेखा–खण्डों का समुच्चय है, जो बिन्दु R(1, 1) से गुजरती हैं तथा E_1 के दो भिन्न बिन्दुओं के युग्म को जोड़ती हैं। माना कि E_2, समुच्चय F_2 के रेखाखण्डों के मध्य बिन्दुओं का समुच्चय है। तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) बिन्दु (–2, 7) समुच्चय E_1 में स्थित है (B) बिन्दु (4/5, 7/5) समुच्चय E_2 में स्थित नहीं है

(C) बिन्दु (1/2, 1) समुच्चय E_2 में स्थित है (D) बिन्दु (0, 3/2) समुच्चय E_1 में स्थित नहीं है

Sol.



Note that $\angle APB=\frac{\pi}{2}$, hence locus of P is $(x+2)(x-2)+(y-7)(y+5)=0$

$d^2 + y^2 - 2y - 39 = 0$ .... E_1

Locus of mid-points of chords passing through (1, 1) is

$h + K - (1 + k) = h^2 + k^2 - 2K$

$\Rightarrow \quad h^2 + K^2 - 2K - h + 1 = 0$

Hence E_2 is $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$

Q.3 Let S be the set of all column matrices $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ such that $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ and the system of equations (in real variables)

$-x + 2y + 5z = b_1$

$2x - 4y + 3z = b_2$

$x - 2y + 2z = b_3$

has at least one solution. Then, which of the following system(s) (in real variables) has (have) at least one solution for each $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in S$?

माना कि S उन सभी स्तम्भ आव्यूहों $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ का समुच्चय है जिनके लिए $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ और वास्तविक चरों वाले समीकरण निकाय

$-x + 2y + 5z = b_1$

$2x - 4y + 3z = b_2$

$x - 2y + 2z = b_3$

का कम से कम एक हल है। तब निम्नलिखित वास्तविक चरों वाले निकायों में से किस (कौन से) निकाय (निकायों) का भी प्रतयेक $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in S$ के लिए कम से कम एक हल है ?

(A) $x + 2y + 3z = b_1$, $4y + 5z = b_2$ and $x + 2y + 6z = b_3$

(B) $x + y + 3z = b_1$, $5x + 2y + 6z = b_2$ and $-2x - y - 3z = b_3$

(C) $-x + 2y - 5z = b_1$, $2x - 4y + 10z = b_2$ and $x - 2y + 5z = b_3$

(D) $x + 2y + 5z = b_1$, $2x + 3z = b_2$ and $x + 4y - 5z = b_3$

Sol. $\Delta = 0$ so for at least one solutions $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 + 7b_2 = 13b_3$ ....(i)

option (A) $\Delta \neq 0 \;\Rightarrow$ unique solution $\Rightarrow$ option (A) is correct

option (D) $\Delta \neq 0 \;\Rightarrow$ unique solution $\Rightarrow$ option (B) is correct

option (C) $\Delta = 0 \;\Rightarrow$ equations are $x - 2y + 5z = -b_1$

$$x - 2y + 5z = \frac{b_2}{2}$$

$$x - 2y + 5z = b_2$$

There planes are parallel so they must be coincident

$\Rightarrow \quad -b_1 = \frac{b_2}{2} = b_3$ which satisfies equation (1) for all $b_1, b_2, b_3 \quad \Rightarrow \quad$ option (C) is correct.

option (B) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Also $\Delta_1 = 0$

For infinite solutions, Δ_2 and Δ_3 must be 0

$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 1 \\ 5 & b_2 & 2 \\ 2 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -b_1 - b_2 + 3b_3 = 0$ which does not satisfy (i) for all $b_1, b_2\ b_3$ so option(s) wrong

4. Consider two straight lines, each of which is tangent to both the circle $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ and the parabola $y^2 = 4x$. Let these lines intersect at the point Q. Consider the ellipse whose center is at the origin O(0, 0) and whose semi-major axis is OQ. If the length of the minor axis of this ellipse is $\sqrt{2}$, then which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) For the ellipse, the eccentricity is $\frac{1}{\sqrt{2}}$ and the length of the latus rectum is 1

(B) For the ellipse, the eccentricity is $\frac{1}{2}$ and the length of the latus rectum is $\frac{1}{2}$

(C) The area of the region bounded by the ellipse between the lines $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $x = 1$ is $\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi - 2)$

(D) The area of the region bounded by the ellipse between the lines $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $x = 1$ is $\frac{1}{16}(\pi - 2)$

ऐसी दो सरल रेखाओं पर विचार कीजिये, जिनमें से प्रत्येक, वृत्त $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ और परवलय दोनों पर ही स्पर्शी है। माना कि ये रेखाऐं बिन्दु Q पर प्रतिच्छेद करती है। एक ऐसे दीर्घवृत्त पर विचार कीजिये जिसका केन्द्र मूलबिन्दु पर है और जिसका अर्ध–दीर्घाक्ष OQ है। यदि इस दीर्घवृत्त के लघु अक्ष की लम्बाई $\sqrt{2}$ है, तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

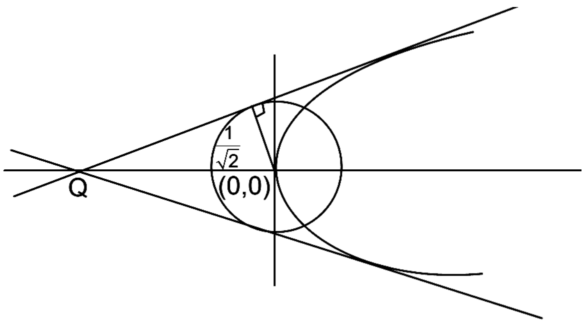
(A) दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{2}}$ है और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 1 है

(B) दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $\frac{1}{2}$ है

(C) रेखाओं $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ व $x = 1$ के बीच दीर्घवृत्त द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi - 2)$ है

(D) रेखाओं $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ व $x = 1$ के बीच दीर्घवृत्त द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{1}{16}(\pi - 2)$ है

Sol.



$$\therefore \quad \left|\frac{0+0+\frac{1}{m}}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad m^4 + m^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad m = \pm 1$

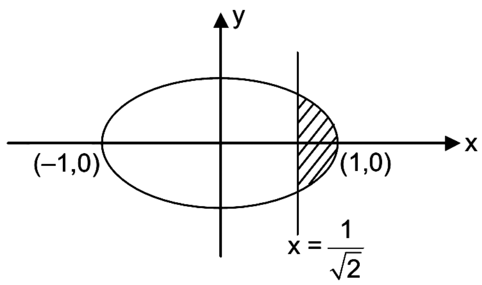
Equation of common tangents are $y = x + 1$ & $y = -x - 1$

point Q is $(-1, 0)$

$\therefore$ Equation of ellipse is $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = 1$

(A) $e = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $LR = \frac{2b^2}{a} = 1$

(C)



Area $2.\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{1/\sqrt{2}}^{1}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{x}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{4\sqrt{2}}$$

5. Let s, t, r be non-zero complex numbers and L be the set of solutions $z = x + iy\ \left(x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\right)$ of the equation $sz + t\overline{z} + r = 0$, where $\overline{z} = x - iy$. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) If L has exactly one element, then $|s| \neq |t|$

(B) If $|s| = |t|$, then L has infinitely many elements

(C) The number of elements in $L \cap \{z : |z - 1 + i| = 5\}$ is at most 2

(D) If L has more than one element, then L has infinitely many elements

माना कि s, t, r शून्येत्तर सम्मिश्र संख्यायें हैं और L समीकरण $sz + t\overline{z} + r = 0$ के हलों $z = x + iy\ \left(x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\right)$ का समुच्चय है, जहाँ $\overline{z} = x - iy$ । तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) यदि L में ठीक एक अवयव है, तब $|s| \neq |t|$

(B) यदि $|s| = |t|$, तब L में अनन्त अवयव हैं

(C) $L \cap \{z : |z - 1 + i| = 5\}$ में अवयवों की अधिकतम संख्या 2 है

(D) यदि L में एक से ज्यादा अवयव हैं, तब L में अनन्त अवयव हैं

Sol. $sz + t\overline{z} + r = 0, \overline{z} = x - iy$

$\overline{s}\,\overline{z} + \overline{t}\,z + r = 0$

(1) + (2)

$(t+\overline{s})\,\overline{z} + (s+\overline{t})\,z + (r+\overline{r}) = 0$

$(t+\overline{s})\,\overline{z} + (s-\overline{t})\,z + (r-\overline{r}) = 0$

For unique solution

$$\frac{t+\overline{s}}{t-\overline{s}} \neq \frac{s+\overline{t}}{s-t}$$

On solving the above equation we get

$|t| \neq |s|$

$\therefore$ option (A) is correct

Lines overlap if

$$\frac{t+\overline{s}}{t-\overline{s}} = \frac{\overline{t}+s}{s-t} = \frac{r+\overline{r}}{r-\overline{r}}$$

$|t| = |s|$ $\quad \overline{t}r - \overline{t}\overline{r} + sr - s\overline{r} = sr + s\overline{r} - \overline{t}r - \overline{t}\overline{r}$

$2\overline{t}r = 2s\overline{r}$

$\overline{t}r = s\overline{r}$

$\therefore \quad |\overline{t}||r| = |s||r|$

$\therefore \quad |t| = |s|$

$\therefore$ If $|t| = |s|$, lines will be parallel for sure but it may not be coincident

For option (C) if element of set L represent line, then this line and given circle can have maximum two common points so option (C) is correct

6. Let $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ be a twice differentiable function such that

$$\lim_{t \to x} \frac{f(x)\sin t - f(t)\sin x}{t - x} = \sin^2 x \text{ for all } x \in (0, \pi).$$

If $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$, then which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

(B) $f(x)<\frac{x^4}{6}-x^2$ for all $x \in (0, \pi)$

(C) There exists $\alpha \in (0, \pi)$ such that $f'(\alpha) = 0$

(D) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

माना कि $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ एक ऐसा द्विअवकलनीय फलन है कि

$\lim\limits_{t\to x}\frac{f(x)\sin t - f(t)\sin x}{t-x}=\sin^2 x$ सभी $x \in (0, \pi)$ के लिये।

यदि $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$, तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

(B) $f(x)<\frac{x^4}{6}-x^2$ सभी $x \in (0, \pi)$ के लिये

(C) एक ऐसे $\alpha \in (0, \pi)$ का अस्तित्व है जिसके लिये $f'(\alpha) = 0$

(D) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Sol. $\lim\limits_{x\to x}\frac{f(x)\sin t - f(t)\sin x}{t-x}=\sin^2 x$

$\frac{f(x)\cos x - f'(x)\sin x}{\sin^2 x}=1$

$-d\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)=1$

$\frac{f(x)}{\sin x}=-x+c$ $\quad\because\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{12}$ $\quad\Rightarrow\quad c=0 \quad\Rightarrow\quad f(x)=-x\sin x$

(A) $f(x)+f''(x)=-2\cos x$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

(B) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$

(C) f(x) continuous and differentiable and $f(0)=f(x)=0$

Using LMVT $f'(c)=0$ for some $x \in (0, \pi)$

(D) $g(x) = -x\sin x + x^2 - \frac{x^4}{6}$

$g'(x) = f'(x) + 2x - \frac{2x^3}{3}$

$g''(x) = f''(x) + 2x - 2x^2$

$g'''(x) = 3\sin x + x\cos x - 4x = 3(\sin x - x) + x(\cos x - 1)$

$\Rightarrow \quad g'''(x) < 0 \quad \Rightarrow g''(x)$ is decreasing

for $x > 0 \quad g''(x) < g''(0) \quad \Rightarrow \quad g''(x) < 0$

hence $g'(x)$ is decreasing

for $x > 0 \quad g'(x) < g'(0) \quad \Rightarrow \quad g'(x) < 0$

hence $g(x) < 0$

for $x > 0 \quad g(x) < g(0) \quad \Rightarrow \quad g(x) < 0$

Hence $f(x) < \frac{x^4}{6} - x^2 \forall x \in (0, \pi)$

7. The value of the integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+\sqrt{3}}{\left((x+1)^2(1-x)^6\right)^{1/4}} dx \quad \text{is :}$$

समाकल

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+\sqrt{3}}{\left((x+1)^2(1-x)^6\right)^{1/4}} dx$$ का मान है :

Sol. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)dx}{\left[(1+x)^2(1-x)^6\right]^{1/4}}$$

put $\frac{1-x}{1+x} = t \quad \Rightarrow \quad \frac{-2dx}{(1+x)^2} = dt$

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)dt}{-2t^{6/4}} = \frac{-(1+\sqrt{3})}{2} \times \left|\frac{-2}{\sqrt{t}}\right|_1^{1/3} = (1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) = 2$$

8. Let P be a matrix of order 3 × 3 such that all the entries in P are from the set $\{-1, 0, 1\}$. Then, the maximum possible value of the determinant of P is _____ .

माना कि P, 3 × 3 कोटि का एक ऐसा आव्यूह है कि P की सभी प्रविष्टियाँ समुच्चय $\{-1, 0, 1\}$ में से है। तब P के सारणिक का अधिकतम संभावित मान है _____ ।

Sol. $$\det(P) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \le 6$$

value can be 6 only if $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, b_2c_3 = b_1c_3 = 1, b_3c_2 = b_3c_1 = -1$

$\Rightarrow \quad (b_2c_3)\,(b_3c_1)\,(b_1c_2) = -1 \qquad \& \qquad (b_1c_3)\,(b_3c_2)\,(b_2c_1) = 1$

i.e. $\quad b_1b_2b_3c_1c_2c_3 = 1$ and -1

hence not possible

Similar contradiction occurs when $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, b_2c_2 = b_3c_1 = b_1c_2 = 1\ b_3c_2 = b_1c_3 = b_1c_2 = -1$

Now for value to be 5 one the terms must be zero but that will make 2 terms zero which means answer cannot be 5

Now $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ Hence max value $= 4$

9. Let X be a set with exactly 5 elements and Y be a set with exactly 7 elements. If α is the number of one-one functions from X to Y and β is the number of onto functions from Y to X, then the value of $\frac{1}{5!}(\beta - \alpha)$ is _____

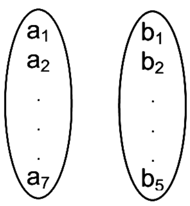
माना कि समुच्चय X में ठीक 5 अवयव हैं और समुच्चय Y में ठीक 7 अवयव हैं। यदि X से Y में एकैकी फलनों की संख्या α है और Y से X में आच्छादक फलनों की संख्या β है, तब $\frac{1}{5!}(\beta - \alpha)$ का मान है।

Sol. $n(X) = 5$

$n(Y) = 7$

$\alpha \rightarrow$ Number of one-one function $= {}^7C_5 \times 5! = 21 \times 120 = 2520$

$\beta \rightarrow$ Number of onto function Y to X



1, 1, 1, 1, 3 $\qquad\qquad$ 1, 1, 1, 2, 2

$$\frac{7!}{3!4!} \times 5! + \frac{7!}{(2!)^3 3!} \times 5! = ({}^7C_3 + 3.{}^7C_3)5! = 4 \times {}^7C_3 \times 5!$$

$$\frac{\beta - \alpha}{5!} = 4 \times {}^7C_3 - {}^7C_5 = 4 \times 35 - 21 = 119$$

10. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable function with $f(0) = 0$. If $y = f(x)$ satisfies the differential equation $\frac{dy}{dx} = (2 + 5y)(5y - 2)$, then the value of $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ is _____.

माना कि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक ऐसा अवकलनीय फलन है जिसके लिये $f(0) = 0$. यदि $y = f(x)$, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (2 + 5y)(5y - 2)$ को सन्तुष्ट करता है, तब $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ का मान है।

Sol. $\frac{dy}{dx} = (5y + 2)(5y - 2)$

$$\frac{1}{25}\int\frac{dy}{\left(y+\frac{2}{5}\right)\left(y-\frac{2}{5}\right)}=\int dx$$

$$\frac{1}{25}.\frac{5}{4}ln\left|\frac{y-\frac{2}{5}}{y+\frac{2}{5}}\right|=x+c$$

$$\frac{1}{25}ln\left|\frac{5y-2}{5y+2}\right|=x+c$$

at $x=0, y=0 \quad\Rightarrow\quad c=0$

Hence $\frac{2-5y}{2+5y}=e^{20x}$

$\frac{2-5y}{2+5y}=e^{20x}, \lim_{x\to\infty} e^{20x}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty} y=\frac{2}{5}=0.4$

11. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a differentiable function with $f(0)=1$ and satisfying the equation

$f(x+y)=f(x)f'(y)+f'(x)f(y)$ for all $x, y\in\mathbb{R}$

Then, the value of $\log_e(f(4))$ is _____.

माना कि $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक ऐसा अवकलनीय फलन है जिसके लिये $f(0)=1$, और जो सभी

$x, y\in\mathbb{R}$ के लिये समीकरण $f(x+y)=f(x)f'(y)+f'(x)f(y)$ को सन्तुष्ट करता है।

तब $\log_e(f(4))$ का मान है।

Sol. $f(x+y)=f(x).f'(y)+f'(x).f(y)$

substituting $x=y=0$, we get

$f(0)=2f'(0) \quad\Rightarrow\quad f'(0)=\frac{1}{2}$

Now substituting $y=0$

$f(x)=f(x).f'(0)+f'(x).f(0)$

$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{f(x)}{2}$

$\Rightarrow \quad f(x)=\lambda e^{x/2} \quad\Rightarrow\quad f(x)=e^{x/2}$ (as $f(0)=1$)

Now $ln(f(x))=\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad ln(f(4))=2$

12. Let P be a point in the first octant, whose image Q in the plane $x+y=3$ (that is, the line segment PQ is perpendicular to the plane $x+y=3$ and the mid-point of PQ lies in the plane $x+y=3$ lies on the z-axis. Let the distance of P from the x-axis be 5. If R is the image of P in the xy-plane, then the length of PR is _____ .

माना कि P प्रथम अष्ठांश (first octant) में एक बिन्दु है, जिसका समतल $x+y=3$ में प्रतिबिम्ब Q (अर्थात रेखाखण्ड PQ समतल $x+y=3$ के लम्बवत् है और PQ का मध्य बिन्दु समतल $x+y=3$ में स्थित है) z-अक्ष पर स्थित है। माना कि P की x-अक्ष से दूरी 5 हैं यदि P का xy-समतल में प्रतिबिम्ब R है, तब PR की लम्बाई है।

Sol. $P(\alpha, \beta, \gamma)$

$R(\alpha, \beta, -\gamma)$

Q

$$\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z-\gamma}{0} = \frac{-2(\alpha+\beta-3)}{2}$$

$x = 3 - \beta,\ y = 3 - \alpha,\ z = \gamma$

$Q(3 - \beta, 3 - \alpha, \gamma)$ lies on z-axis

$\therefore \quad \beta = 3, \alpha = 3$

$P(3, 3, \gamma)$ distance from x-axis is 5

$9 + \gamma^2 = 25$

$\gamma^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 4$

$P(3, 3, 4) \quad \therefore \quad PR = 8$

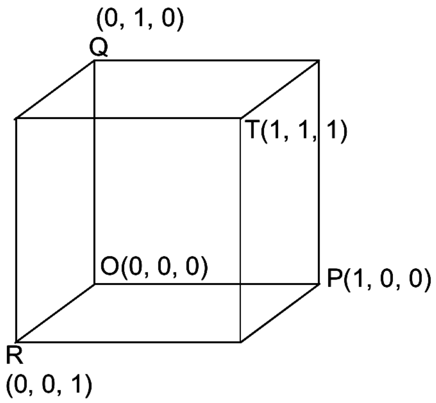
$R(3, 3, -4)$

13. Consider the cube in the first octant with sides OP, OQ and OR of length 1, along the x-axis, y-axis and z-axis, respectively, where O(0,0,0) is the origin. Let $S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ be the centre of the cube and T be the vertex of the cube opposite to the origin O such that S lies on the diagonal OT. If $\vec{p} = \overrightarrow{SP}, \vec{q} = \overrightarrow{SQ}, \vec{r} = \overrightarrow{SR}$ and $\vec{t} = \overrightarrow{ST}$, then the value of $|(\vec{p}\times\vec{q})\times(\vec{r}\times\vec{t})|$ is _____ .

प्रथम अष्ठांश (first octant) में एक ऐसे घन पर विचार कीजिये, जिसकी भुजाओं OP, OQ और OR की लम्बाई 1 है और जो क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष के अनुदिश हैं, जहाँ O(0,0,0) मूलबिन्दु है। माना कि घन का केन्द्र $S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ है, और शीर्ष T मूलबिन्दु O के सम्मुख वाला वह शीर्ष है कि बिन्दु S विकर्ण OT पर स्थित है।

यदि $\vec{p} = \overrightarrow{SP}, \vec{q} = \overrightarrow{SQ}, \vec{r} = \overrightarrow{SR}$ और $\vec{t} = \overrightarrow{ST}$, तब $|(\vec{p}\times\vec{q})\times(\vec{r}\times\vec{t})|$ का मान है।

Sol.



point $S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

point T (1, 1, 1)

$\vec{p} = \overline{SP} = \dfrac{\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{2}$

$\vec{q} = \overline{SQ} = \dfrac{-\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{2}$

$\vec{r} = \overline{SR} = \dfrac{-\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{2}$

$\vec{t} = \overline{ST} = \dfrac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{2}$

Now $\vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}(2\hat{i}+2\hat{j}) = \dfrac{i+\hat{j}}{2}$

$\vec{r}\times\vec{t} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{-2\hat{i}+2\hat{j}}{4} = \dfrac{-\hat{i}+\hat{j}}{2}$

Now $(\vec{p}\times\vec{q})\times(\vec{r}\times\vec{t}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\hat{k}}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|(\vec{p}\times\vec{q})\times(\vec{r}\times\vec{t})\right| = \dfrac{1}{2} = 0.5$

14. Let $X = \left({}^{10}C_1\right)^2 + 2\left({}^{10}C_2\right)^2 + 3\left({}^{10}C_3\right)^2 + ... + 10\left({}^{10}C_{10}\right)^2$,

where ${}^{10}C_r$, $r \in \{1, 2, ..., 10\}$ denote binomial coefficients. Then, the value of $\dfrac{1}{1430}$ X is ______

माना कि

$X = \left({}^{10}C_1\right)^2 + 2\left({}^{10}C_2\right)^2 + 3\left({}^{10}C_3\right)^2 + ... + 10\left({}^{10}C_{10}\right)^2$,

जहाँ ${}^{10}C_r$, $r \in \{1, 2, ..., 10\}$, द्विपद गुणांकों को दर्शाते हैं। तब $\dfrac{1}{1430}$ X का मान है।

Sol. $X = \sum_{r=1}^{10} r.\,{}^{10}C_r.{}^{10}C_r = 10.\sum_{r=1}^{10} {}^{9}C_{r-1}.{}^{10}C_{10-r} = 10.{}^{19}C_9$

Now $\dfrac{X}{1430} = \dfrac{10.{}^{19}C_9}{1430} = \dfrac{{}^{19}C_9}{143} = \dfrac{{}^{19}C_9}{11\times13} = \dfrac{19.17.16}{8} = 19\times34 = 646$

Q.15 Let . $E_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ and } \dfrac{x}{x-1} > 0\right\}$

and $E_2 = \left\{x \in E_1 : \sin^{-1}\left(\log_e\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right) \text{is a real number}\right\}$.

(Here, the inverse trigonometric function $\sin^{-1}x$ assumes values in $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.)

Let $f: E \to \mathbb{R}$ be the function defined by $f(x)=\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)$

and $g: E_2 \to \mathbb{R}$ be the function defined by $g(x)=\sin^{-1}\left(\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$

LIST-I	**LIST-II**
P. The range of f is	1. $\left(-\infty,\frac{1}{1-e}\right]\cup\left[\frac{e}{e-1},\infty\right)$
Q. The range of g contains	2. (0, 1)
R. The domain of f contains	3. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
S. The domain of g is	4. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
	5. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{e}{1-e}\right]$
	6. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{e}{1-e}\right]$

The correct option is:

माना कि $E_1=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 1 \text{ और } \frac{x}{x-1}>0\right\}$

और $E_2=\left\{x\in E_1: \sin^{-1}\left(\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) \text{ एक वास्तविक संख्या है।}\right\}$.

(यहाँ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (inverse trigonometric function) $\sin^{-1}x$ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ में मान धारण करता है।)

माना कि फलन $f: E \to \mathbb{R}$, $f(x)=\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)$ के द्वारा परिभाषित है

और फलन $g: E_2 \to \mathbb{R}$, $g(x)=\sin^{-1}\left(\log_e\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$ के द्वारा परिभाषित है।

सूची-I	**सूची-II**
P. f का परिसर है	1. $\left(-\infty,\frac{1}{1-e}\right]\cup\left[\frac{e}{e-1},\infty\right)$
Q. g के परिसर में समाहित है	2. (0, 1)
R. f के प्रान्त में समाहित है	3. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
S. g का प्रानत है	4. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

5. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{e}{1-e}\right]$

6. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{e}{1-e}\right]$

दिए हुए विकल्पों में से सही विकल्प है :

(A) $P\to 4;\ Q\to 2;\ R\to 1;\ S\to 1$

(B) $P\to 3;\ Q\to 3;\ R\to 6;\ S\to 5$

(C) $P\to 4;\ Q\to 2;\ R\to 1;\ S\to 6$

(D) $P\to 4;\ Q\to 3;\ R\to 6;\ S\to 5$

Sol. $E_1:\frac{x}{x-1}>0 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

$E_2:-1\le l\,n\left(\frac{x}{x-1}\right)\le 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{e}\le\frac{x}{x-1}\le e \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{e}\le 1+\frac{1}{x-1}\le e$

$\frac{1}{e}-1\le\frac{1}{x-1}\le e-1 \quad\Rightarrow\quad (x-1)\in\left(-\infty,\frac{e}{1-e}\right]\cup\left[\frac{1}{e-1},\infty\right)$

$\in\left(-\infty,\frac{e}{e-1}\right]\cup\left[\frac{e}{e-1},\infty\right)$

Now $\frac{x}{x-1}\in(0,\infty)-\{1\}\,\forall\, x\in E_1 \quad\Rightarrow\quad l\,n\left(\frac{x}{x-1}\right)\in(-\infty,\infty)-\{0\}$

$\sin^{-1}\left(l\,n\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

16. In a high school, a committee has to be formed from a group of 6 boys $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ and 5 girls G_1, G_2, G_3, G_4, G_5.

(i) Let α_1 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 5 members, having exactly 3 boys and 2 girls.

(ii) Let α_2 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has at least 2 members, and having an equal number of boys and girls.

(iii) Let α_3 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 5 members, at least 2 of them being girls.

(iv) Let α_4 be the total number of ways in which the committee can be formed such that the committee has 4 members, having at least 2 girls and such that both M_1 and G_1 are NOT in the committee together.

LIST-I	**LIST-II**
P. The value of α_1 is	1. 136
Q. The value of α_2 is	2. 189
R. The value of α_3 is	3. 192
S. The value of α_4 is	4. 200
	5. 381
	6. 461

The correct option is:

एक हाई स्कूल में, 6 बालकों $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ और 5 बालिकाओं G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 के समूह में से एक समिति बनाई जानी है।

(i) माना कि α_1 समिति को इस प्रकार से बनानें के तरीकों की कुल संख्या है कि समिति 5 सदस्य हैं, जिनमें से ठीक 3 बालक और 2 बालिकाएं हैं।

(ii) माना कि α_2 समिति को इस प्रकार से बनानें के तरीकों की कुल संख्या है कि समिति में कम से कम 2 सदस्य हैं, और बालकों और बालिकाओं की संख्या बराबर है।

(iii) माना कि α_3 समिति को इस प्रकार से बनानें के तरीकों की कुल संख्या है कि समिति में 5 सदस्य हैं, जिनमें से कम से कम 2 बालिकाएं हैं।

(iv) माना कि α_4 समिति को इस प्रकार से बनानें के तरीकों की कुल संख्या है कि समिति में 4 सदस्य हैं, जिनमें से कम से कम 2 बालिकाएं हैं और M_1 व G_1 समिति में एक साथ नहीं है।

सूची-I	**सूची-II**
P. α_1 का मान है	1. 136
Q. α_2 का मान है	2. 189
R. α_3 का मान है	3. 192
S. α_4 का मान है	4. 200
	5. 381
	6. 461

दिए हुए विकल्पों में से सही विकल्प है :

(A) $P \to 4; Q \to 6; R \to 2; S \to 1$

(B) $P \to 1; Q \to 4; R \to 2; S \to 3$

(C) $P \to 4; Q \to 6; R \to 5; S \to 2$

(D) $P \to 4; Q \to 2; R \to 3; S \to 1$

Sol. 6 Boys & 5 girls

$\alpha_1 \to$ number of ways of selecting 3 boys & 2 girls ${}^6C_3 \times {}^5C_2 = 200$

$\alpha_2 \to$ Boys & girls are equal & members ≥ 2

${}^6C_1 . {}^5C_1 + {}^6C_2 . {}^5C_2 + {}^6C_3 . {}^5C_3 + {}^6C_4 . {}^5C_4 + {}^6C_5 . {}^5C_5 = {}^{11}C_5 - 1 = 461$

$\alpha_3 \to$ number of ways of selecting 5 having at least 2 girls ${}^{11}C_5 - {}^6C_5 - {}^6C_4 . {}^5C_1 = {}^{11}C_5 - 81 = 381$

$\alpha_4 \to G_1$ is included $\to {}^4C_1 . {}^5C_2 + {}^4C_2 . {}^5C_1 + {}^4C_3 = 40 + 30 + 4 = 74$

M_1 is included $\to {}^4C_2 . {}^5C_1 + {}^4C_3 = 34$

G_1 & M_1 both are excluded $\to {}^4C_4 + {}^4C_3 . {}^5C_1 + {}^4C_2 . {}^5C_2 = 81$

Total = 74 + 34 + 81 = 189

17. Let $H : \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, where $\alpha > b > 0$, be a hyperbola in the xy-plane whose conjugate axis LM subtends an angle of 60° at one of its vertices N. Let the area of the triangle LMN be $4\sqrt{3}$.

LIST-I	**LIST-II**
P. The length of the conjugate axis of H is	1. 8

Q. The eccentricity of H is 2. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

R. The distance between the foci of H is 3. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

S. The length of the latus rectum of H is 4. 4

The correct option is:

माना कि $H:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, जहाँ $\alpha > b > 0$, xy-समतल में एक ऐसा अतिपरवलय है जिसका संयुग्मी अक्ष LM उसके एक शीर्ष N पर 60^o का कोण अंतरित करता है। माना कि त्रिभुज LMN का क्षेत्रफल $4\sqrt{3}$ है।

सूची-I	**सूची-II**
P. H के संयुग्मी अक्ष की लम्बाई है	1. 8
Q. H की उत्केन्द्रता है	2. $\frac{4}{\sqrt{3}}$
R. H की नभियों के बीच की दूरी है	3. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
S. H के नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है	4. 4

दिए हुए विकल्पों में से सही विकल्प है :

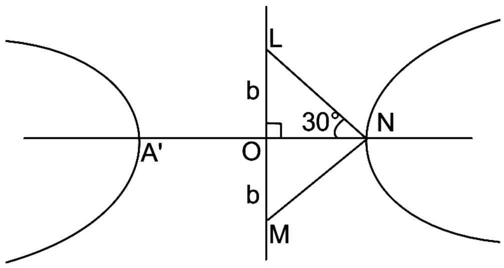
(A) $P \rightarrow 4; Q \rightarrow 2; R \rightarrow 1; S \rightarrow 3$

(B) $P \rightarrow 4; Q \rightarrow 3; R \rightarrow 1; S \rightarrow 2$

(C) $P \rightarrow 4; Q \rightarrow 1; R \rightarrow 3; S \rightarrow 2$

(D) $P \rightarrow 3; Q \rightarrow 4; R \rightarrow 2; S \rightarrow 1$

Sol.



Area of LMN $=4\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}(2b)(\sqrt{3}\,b)=4\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad b^2=4 \quad\Rightarrow\quad b=2 \quad\Rightarrow\quad 2b=4$$

Here $\frac{a}{b}=\cot 30^o \quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{3}b \quad\Rightarrow\quad a=2\sqrt{3}$

$b^2 = a^2(e^2-1)$

$4 = 12(e^2-1)$

$$e^2=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad e=\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ and } \quad 2ae=2\times 2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=8$$

and length of latus ractum $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 4}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

CONT DIFFEREN

18. Let $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f_3\left(-1, e^{\frac{\pi}{2}} - 2\right) \to \mathbb{R}$ and $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

defined by

(i) $f_1(x) = \sin\left(\sqrt{1 - e^{-x^2}}\right)$,

(ii) $f_2(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{\tan^{-1} x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, where the inverse trigonometric function $\tan^{-1}x$

assumes values in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

(iii) $f_3(x) = [\sin(\log_e(x+2))]$, where, for $t \in \mathbb{R}$ $[t]$ denotes the greatest integer less than or equal to t,

(iv) $f_4(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if} \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

.

LIST-I	LIST-II
P. The function f_1 is	1. NOT continuous at $x = 0$
Q. The function f_2 is	2. continuous at $x = 0$ and NOT differentiable at $x = 0$
R. The function f_3 is	3. differentiable at $x = 0$ and its derivative is NOT continuous at $x = 0$
S. The function f_4 is	4. differentiable at $x = 0$ and its derivative is continuous at $x = 0$

The correct option is:

(A) $P \to 2; Q \to 3; R \to 1; S \to 4$

(B) $P \to 4; Q \to 1; R \to 2; S \to 3$

(C) $P \to 4; Q \to 2; R \to 1; S \to 3$

(D) $P \to 2; Q \to 1; R \to 4; S \to 3$

माना कि फलन $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f_3\left(-1, e^{\frac{\pi}{2}} - 2\right) \to \mathbb{R}$ और $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

इस प्रकार परिभाषित हैं कि

(i) $f_1(x) = \sin\left(\sqrt{1-e^{-x^2}}\right)$,

(ii) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{\tan^{-1} x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, जहाँ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

$\tan^{-1}x$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में मान धारण करता है,

(iii) $f_3(x) = [\sin(\log_e(x+2))]$, जहाँ $t \in \mathbb{R}$ के लिये, [t], t से छोटा या t के बराबर महत्तम पूर्णांक को दर्शाता है ,

(iv) $f_4(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{if } \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

.

LIST-I	**LIST-II**
P. फलन f_1	1. $x = 0$ पर संतत नहीं है
Q. फलन f_2	2. $x = 0$ पर संतत है और $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है
R. फलन f_3	3. $x = 0$ पर अवकलनीय है और $x = 0$ पर इसका अवकलज संतत नहीं है
S. फलन f_4	4. $x = 0$ पर अवकलनीय है और $x = 0$ पर इसका अवकलज संतत है

दिए हुए विकल्पों में से सही विकल्प है :

(A) $P \to 2; Q \to 3; R \to 1; S \to 4$

(B) $P \to 4; Q \to 1; R \to 2; S \to 3$

(C) $P \to 4; Q \to 2; R \to 1; S \to 3$

(D*) $P \to 2; Q \to 1; R \to 4; S \to 3$

Sol. (i) $f'_1(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{1-e^{-h^2}} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{1-e^{-h^2}}}{\sqrt{1-e^{-h^2}}} \times \sqrt{\dfrac{1-e^{-h^2}}{h^2}} \times \dfrac{|h|}{h}$

$= 1 \times 1 \times \dfrac{|h|}{h} = 1 \times 1 \times \dfrac{|h|}{h}$

= limit does not exist.

$\Rightarrow$ for option (P), (2) is correct.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{\tan^{-1} x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{|x|} \times \dfrac{x}{\tan^{-1} x} \times \dfrac{|x|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} 1 \times 1 \times \dfrac{|x|}{x}$

= limit does not exist $\Rightarrow$ for option Q, (1) is correct.

(iii) $= \lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = \lim\limits_{x\to 0} [\sin(\log_e(x+2)$ tends to 2] now at x tends to zero (x + 2) tends to 2

$\Rightarrow \quad \log_e (x + 2)$ tends to $ln2$

which is less than 1

$0 < \lim\limits_{x\to 0} \sin(\log_e(x+2)) < \sin 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0}[\sin(\log_e(x+2))] = 0$

$f_3(x) = \{0 \quad x \in [-1, e^{\pi/2} - 2)$

$\Rightarrow \quad f'_3(x) = 0 \quad \forall\, x \in (-1, e^{\pi/2} - 2)$

$\Rightarrow \quad f''_3(x) = 0 \quad \forall\, x \in (-1, e^{\pi/2} - 2)$

Hence for (R), (4) is correct.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right) = 0$

$$f'_4(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f'_4(x) = -\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$f''_4(0) = \frac{-\cos\frac{1}{h} + h\sin\frac{1}{h} - 0}{h} \quad \Rightarrow \quad \text{does not exist}$$

hence for (S), (3) is correct.