JEE (ADVANCED) 2018 PAPER I

PHYSICS

This section contains **SIX (06)** questions.

Each question has **FOUR** options for correct answer(s). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct option(s).

For each question, choose the correct option(s) to answer the question.

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +4 If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.

Partial Marks : +3 If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.

Partial Marks : +2 If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct options.

Partial Marks : +1 If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.

Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).

Negative Marks : –2 In all other cases.

For Example: If first, third and fourth are the ONLY three correct options for a question with second option being an incorrect option; selecting only all the three correct options will result in +4 marks. Selecting only two of the three correct options (e.g. the first and fourth options), without selecting any incorrect option (second option in this case), will result in +2 marks. Selecting only one of the three correct options (either first or third or fourth option) ,without selecting any incorrect option (second option in this case), will result in +1 marks. Selecting any incorrect option(s) (second option in this case), with or without selection of any correct option(s) will result in –2 marks.

Circular motion

1. The potential energy of a particle of mass m at a distance r from a fixed point O is given by $V(r) = kr^2/2$, where k is a positive constant of appropriate dimensions. This particle is moving in a circular orbit of radius R about the point O. If ν is the speed of the particle and L is the magnitude of its angular momentum about O, which of the following statements is (are) true?

द्रव्यमान (mass) m के एक कण की स्थितिज ऊर्जा (Potential energy) $V(r) = kr^2/2$ है जहॉ r एक नियत बिन्दु (fixed point) O से कण दुरी है और k उचित विमाओं (dimensions) वाला एक धनात्मक नियंताक हैं। यह कण बिन्दु O के सापेक्ष R त्रिज्या वाली एक वृतीय कक्षा (circular orbit) में घूम रहा है। यदि v कण की चाल है और L बिन्दु O के सापेक्ष इसके कोणीय संवेग का परिमाण है तो निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सही है(हैं)?

(A) $\nu = \sqrt{\frac{k}{2m}}R$ (B) $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}R$ (C) $L = \sqrt{mk}R^2$ (D) $L = \sqrt{\frac{mk}{2}}R^2$

S. BC

$U = \frac{kr^2}{2}$

$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{dU}{dr} = -k\vec{r}$

$\frac{mv^2}{R} = +kR \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}R$

Angular momentum $L = mvR = \sqrt{mk}R^2$

Rotational Dynamics

2. Consider a body of mass 1.0 kg at rest at the origin at time t = 0. A force $\vec{F} = (\alpha t\hat{i} + \beta\hat{j})$ is applied on the body, where $\alpha = 1.0\ Ns^{-1}$ and $\beta = 1.0$ N. The torque acting on the body about the origin at time t = 1.0 s is ?? $\vec{\tau}$. Which of the following statements is (are) true?

(A) $|\vec{\tau}| = \frac{1}{3}$ Nm

(B) The torque $|\vec{\tau}|$ is in the direction of the unit vector $+\hat{k}$

(C) The velocity of the body at t = 1s is $\vec{v} = \frac{1}{2}(\hat{i} + 2\hat{j})\ ms^{-1}$

(D) The magnitude of displacement of the body at t = 1s is $\frac{1}{6}$ m

1.0 kg द्रव्यमान की एक वस्तु समय t = 0 पर मूलबिन्दु पर विरामवस्था में है। इस वस्तु पर एक बल $\vec{F} = (\alpha t\hat{i} + \beta\hat{j})$ लगाया जाता है जहॉं $\alpha = 1.0\ Ns^{-1}$ तथा $\beta = 1.0$ N है। समय t = 1.0s पर मूल बिदु के सापेक्ष वस्तु पर लगने वाला बल आघूर्ण $\vec{\tau}$ है। निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सही है। (हैं।)

(A) $|\vec{\tau}| = \frac{1}{3}$ Nm

(B) बल आघूर्ण $|\vec{\tau}|$ मात्रक सदिश $+\hat{k}$ की दिशा में है

(C) समय t = 1s पर वस्तु का वेग $\vec{v} = \frac{1}{2}(\hat{i} + 2\hat{j})\ ms^{-1}$ है।

(D) समय t = 1s पर वस्तु के विस्थापन का परिमाण $\frac{1}{6}$ m है।

S. AC

m = 1kg

$m\vec{a} = \vec{F} = t\hat{i} + \hat{j}$

(1) $\vec{a} = t\hat{i} + \hat{j}$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = t\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{v} = \frac{t^2}{2}\hat{i} + t\hat{j} = \frac{1}{2}\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{s} = \frac{t^3}{6}\hat{i} + \frac{t^2}{2}\hat{j}$

$\vec{s}(t=1) = \frac{1}{6}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= \frac{1}{6}(\hat{i} \times \hat{j}) + \frac{1}{2}(\hat{j} \times \hat{i})$

$= \frac{1}{6}\hat{k} - \frac{1}{2}\hat{k} = \frac{-2}{6}\hat{k} = -\frac{1}{3}\hat{k}$

$|\tau| = \frac{1}{3}$ at t = 1 sec.

Fluid dynamics (Surface tension)

3. A uniform capillary tube of inner radius r is dipped vertically into a beaker filled with water. The water rises to a height h in the capillary tube above the water surface in the beaker. The surface tension of water is σ. The angle of contact between water and the wall of the capillary tube is θ. Ignore the mass of water in the meniscus. Which of the following statements is (are) true?

(A) For a given material of the capillary tube, h decreases with increase in r

(B) For a given material of the capillary tube, h is independent of σ

(C) If this experiment is performed in a lift going up with a constant acceleration, then h decreases

(D) h is proportional to contact angle θ

एक आन्तरिक त्रिज्या r वाली एकसमान केशनली (uniform capillary tube) को ऊर्ध्वाधर तरीके से (vertically) पानी से भरे एक बीकर (beaker) में डुबोया जाता है। केशनली में पानी, बीकर के पानी के पृष्ठ (water surface) से, h ऊँचाई तक उठता है। पानी का पृष्ठ तनाव (surface tension) σ है। पानी और केशनली की दीवार के बीच का संपर्क कोण (angle of contact) θ है। मेनिस्कस (meniscus) में उपस्थित पानी के द्रव्यमान (mass) की उपेक्षा कीजिये। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा/कौनसे सही है / हैं –

(A) एक दिये गये पदार्थ से बनी केशनली का r बढ़ाने से h कम होता है।

(B) एक दिये गये पदार्थ से बनी केशनली में, h पृष्ठ तनाव σ पर निर्भर नहीं करता है।

(C) यदि यह प्रयोग एक नियत त्वरण (constant acceleration) से ऊपर जाने वाली लिफ्ट में किया जाता है, तो h कम होता है।

(D) h संपर्क कोण θ के समानुपातिक है।

S. AC

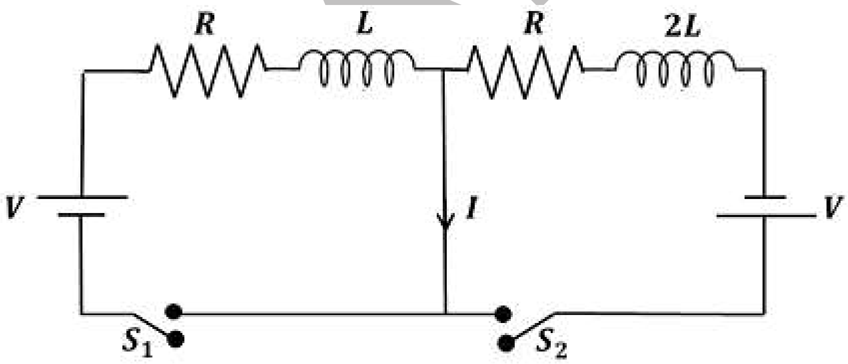
$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gr}$$

When lift is going up with constant acceleration $h=\dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho(g+a)r}$

Electromagnetic Induction (EMI)

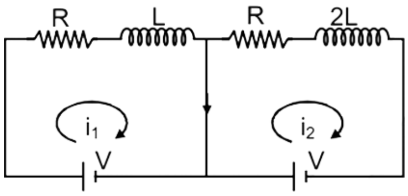
4. In the figure below, the switches S_1 and S_2 are closed simultaneously at $t = 0$ and a current starts to flow in the circuit. Both the batteries have the same magnitude of the electromotive force (emf) and the polarities are as indicated in the figure. Ignore mutual inductance between the inductors. The current I in the middle wire reaches its maximum magnitude I_{max} at time $t = \tau$. Which of the following statements is (are) true?

नीचे दर्शाये गये चित्र में S_1 तथा S_2 कुंजियों (switches) को समय $t = 0$ पर एक साथ बंद किया जाता है परिपथ (circuit) में धारा बहने लगती है। दोनों बैटरियों (batteries) के विद्युत वाहक बल (electromotive force ; emf) का परिमाण समान है और उनका ध्रुवण (polarity) चित्र में दर्शाया गया है। दोनों प्रेरकों (inductors) के बीच अन्योन्य प्रेरकत्व (mutual inductance) की उपेक्षा कीजिये। यदि मध्य में स्थिर तार में धारा I अपने अधिकतम परिमाण I_{max} पर समय $t = \tau$ पर पहुंचती है, तो निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है/हैं –



(A) $I_{max}=\dfrac{V}{2R}$ (B) $I_{max}=\dfrac{V}{4R}$ (C) $\tau=\dfrac{L}{R}\ln 2$ (D) $\tau=\dfrac{2L}{R}\ln 2$

S. BD



Δi (current in middle wire) $= i_1 - i_2$

$$=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)-\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{2L}}\right)$$

$$= \frac{V}{R}\left(e^{-\frac{Rt}{2L}} - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

For i_{max} : $\frac{d}{dt}(\Delta i) = 0$

$$\Rightarrow \frac{V}{R}\left(+\frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{R}{2L}e^{-\frac{Rt}{2L}}\right) = 0 \qquad \Rightarrow e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{Rt}{2L}} = \frac{1}{2} \;\&\; t = \frac{2L}{R}\ln 2$$

$$\Rightarrow \text{and } i_{max} = \frac{V}{4R}$$

EMF (Magnetic field)

5. Two infinitely long straight wires lie in the xy-plane along the lines $x = \pm R$. The wire located at $x = +R$ carries a constant current I_1 and the wire located at $x = -R$ carries a constant current I_2. A circular loop of radius R is suspended with its centre at $(0, 0, \sqrt{3}R)$ and in a plane parallel to the xy-plane. This loop carries a constant current I in the clockwise direction as seen from above the loop. The current in the wire is taken to be positive if it is in the $+\hat{j}$ direction. Which of the following statements regarding the magnetic field $\vec{B}$ is (are) true ?

(A) If $I_1 = I_2$, then $\vec{B}$ cannot be equal to zero at the origin (0, 0, 0)

(B) If $I_1 > 0$ and $I_2 < 0$, then $\vec{B}$ can be equal to zero at the origin (0, 0, 0)

(C) If $I_1 < 0$ and $I_2 > 0$, then $\vec{B}$ can be equal to zero at the origin (0, 0, 0)

(D) If $I_1 = I_2$, then the z-component of the magnetic field at the centre of the loop is $\left(-\frac{\mu_0 I}{2R}\right)$

दो अनन्त लम्बाई के सीधे तार xy-तल में $x = \pm R$ रेखाओं पर रखे हुये है। $x = +R$ पर रखे हुये तार में I_1 और $x = -R$ पर रखे हुये तार में I_2 स्थिर (constant) धारायें बह रही है। R त्रिज्या का एक वृत्ताकार पाश (circular loop), जिसका केन्द्र $(0, 0, \sqrt{3}R)$ है, इस प्रकार लटका हुआ है कि पाश का तल xy-तल के समान्तर है। पाश में एक स्थिर धारा (constant current) I बह रही है। पाश के ऊपर से देखने पर पाश में धारा की दिशा दक्षिणावर्त (clockwise) है। अनन्त लम्बाई के तार में धारा को धनात्मक (positive) माना जाता है यदि यह मात्रक सदिश (unit vector) $+\hat{j}$ की दिशा में है। चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ के बारे में निम्नलिखित कथनों में से कौनसा/कौनसे सही है/हैं –

(A) यदि $I_1 = I_2$ हो तो मूल बिन्दु (0, 0, 0) पर $\vec{B}$ शून्य हो सकता है।

(B) यदि $I_1 > 0$ तथा $I_2 < 0$ हो तो मूल बिन्दु (0, 0, 0) पर $\vec{B}$ शून्य हो सकता है।

(C) यदि $I_1 < 0$ तथा $I_2 > 0$ हो तो मूल बिन्दु (0, 0, 0) पर $\vec{B}$ शून्य हो सकता है।

(D) यदि $I_1 = I_2$ हो तो पाश के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र का z-घटक का मान $\left(-\frac{\mu_0 I}{2R}\right)$ है।

S. ABD

Magnetic field due to ring at origin

$$= \frac{\mu_0 \times I \times R^2}{2 \times 8R^3}\left(-\hat{K}\right) = \frac{\mu_0 I}{16R}\left(-\hat{K}\right)$$

Magnetic field at origin due to wires

$$= \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}\right)\hat{K}$$

Here I_1 and I_2 will be substituted with sign

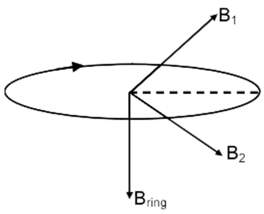
(A) If $I_1 = I_2$ then $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{16R}\left(-\hat{K}\right)$

(B) If $I_1 > 0$ and $I_2 < 0$ then it can be zero

(C) If $I_1 < 0$, $I_2 > 0$

thens $\vec{B} = -\left[\frac{\mu_0\left(I_1 + I_2\right)}{2\pi R} + \frac{\mu.I}{16R}\right]\hat{K}$

It can not be zero

(D) 

$B_1 = B_2$

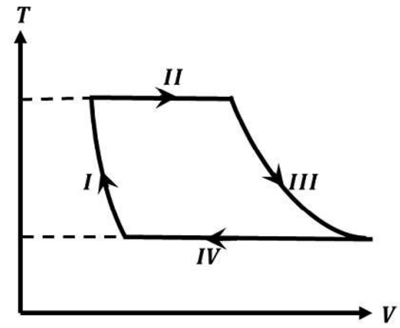
magnetic field along z-axis is only due to ring

$B = \frac{\mu_0 i}{2R}$ in -z direction

Thermodynamics

6. One mole of a monatomic ideal gas undergoes a cyclic process as shown in the figure (where V is the volume and T is the temperature). Which of the statements below is (are) true?

एकपरमाण्विक आदर्श गैस का एक मोल चित्र में दर्शाये गये चक्रीय प्रक्रम से गुजरता है (जहॉ V आयतन है तथा T तापमान है). निम्नलिखित कथनों में से कौन सा सही है। (है।)



(A) Process I is an isochoric process

(B) In process II, gas absorbs heat

(C) In process IV, gas releases heat

(D) Processes I and III are not isobaric

(A) प्रक्रम I एक समआयतनिक प्रक्रम है।

(B) प्रक्रम II में गैस ऊष्मा को अवशोषित करती है।

(C) प्रक्रम IV में गैस ऊष्मा को निष्कासित करती है।

(D) प्रक्रम I और प्रक्रम III समदाबीय नहीं है।

S. BCD

Process II is isothermal expansion

$\Rightarrow$ heat is positive

Process IV is isothermal compression

$\Rightarrow$ heat is negative

SECTION 2 (Maximum Marks: 24)

This section contains EIGHT (08) questions. The answer to each question is a NUMERICAL VALUE.

For each question, enter the correct numerical value (in decimal notation, truncated/rounded-off to the second decimal place; e.g. 6.25, 7.00, -0.33, -.30, 30.27, -127.30) using the mouse and the onscreen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +3 If ONLY the correct numerical value is entered as answer.

Zero Marks : 0 in all other cases.

Vectors

7. Two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are defined as $\vec{A} = a\hat{i}$ and $\vec{B} = a\left(\cos\omega\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$, where α is a constant and $\omega = \pi/6\,\text{rad s}^{-1}$. If $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{3}\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$ at time $t = \tau$ for the first time, the value of τ, in seconds, is ....

$\vec{A}$ और $\vec{B}$ दो सदिश राशियॉ है जहॉ $\vec{A} = a\hat{i}$ तथा $\vec{B} = a\left(\cos\omega \hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$ है। यहॉ α एक स्थिरांक है और $\omega = \pi/6\,\text{rad s}^{-1}$ है। यदि $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{3}\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$ प्रथम बार समय $t = \tau$ पर होता है तो τ का मान सेकेंडों में .... है।

Ans. 2.00

S. $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{3}\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$

$$\sqrt{(a + a\cos\omega t)^2 + (a\sin\omega t)^2} = \sqrt{3}\sqrt{(a - a\cos\omega t)^2 + (a\sin\omega t)^2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{\omega t}{2} = \pm\sqrt{3}\times 2\sin\frac{\omega t}{2}$$

$$\tan\frac{\omega t}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\omega t}{2} = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$t = (12n \pm 2)$s

$= 2$s, 10s, 14s ......

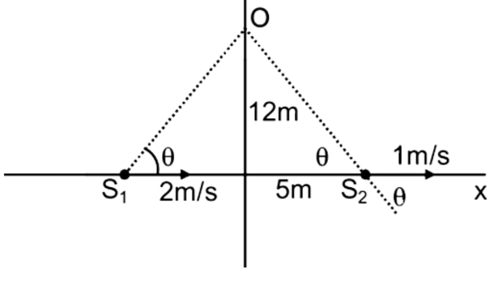
Sound Waves

8. Two men are walking along a horizontal straight line in the same direction. The man in front walks at a speed $1.0\,\text{ms}^{-1}$ and the man behind walks at a speed $2.0\,\text{ms}^{-1}$. A third man is standing at a height 12 m above the same horizontal line such that all three men are in a vertical plane. The two walking men are blowing identical whistles which emit a sound of frequency 1430 Hz. The speed of sound in air is $330\,\text{ms}^{-1}$. At the instant, when the moving men are 10 m apart, the stationary man is equidistant from them. The frequency of beats in Hz, heard by the stationary man at this instant, is ....

दो आदमी एक क्षैतिज सीधी रेखा पद एक ही दिशा में गितिमान है। आगे वाले आदमी की चाल $1.0\,\text{ms}^{-1}$ है और पीछे वाले आदमी की चाल $2.0\,\text{ms}^{-1}$ है। एक तीसरा आदमी उसी क्षैतिज रेखा से 12 m की ऊचाई पर इस प्रकार खडा है कि तीनों आदमी एक ही ऊर्ध्वाधर तल में है। दोनों गतिमान आदमी 1430 Hz आवृति वाली एक जैसी सीटियॉ बजा रहे है। वायु में ध्वनि की चाल $330\,\text{ms}^{-1}$ है। जब गतिमान आदमियों के बीच की दुरी 10 m है उसी पल स्थिर आदमी उन दोनों से समान दुरी पर है। उस पल स्थिर आदमी द्वारा सुनी गयी विस्पंदओं की आवृति .... Hz है।

Ans. 5.00

S.



$$f_1 = f\left(\frac{v}{v - 2\cos\theta}\right) \qquad f_2 = f\left(\frac{v}{v + \cos\theta}\right)$$

$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ and v = 330 m/sec

Beat frequency = $f_1 - f_2$

$$= \frac{fvx3\cos\theta}{(v-2\cos\theta)(v+\cos\theta)} = 5$$

Rotational Dynamics

9. A ring and a disc are initially at rest, side by side, at the top of an inclined plane which makes an angle 60° with the horizontal. They start to roll without slipping at the same instant of time along the shortest path. If the time difference between their reaching the ground is $\left(2-\sqrt{3}\right)/\sqrt{10}\,s$, then the height of the top of the inclined plane, in metres, is .... (Take $g = 10\ ms^{-2}$)

एक वृताकार वलय और एक वृताकार चकती एक आनत तल के शीर्ष पर अगल बगल विरामवस्था में है। आनत तल, क्षैतिज तल से 60° का कोण बनाता है। दोनों वस्तुएं एक ही पल न्यूनतम दुरी वाले पथ पर बिना फिसले लोटाना आरम्भ करती है। यदि दोनों वस्तुओं के क्षैतिज तल पर पहुँचने का समयांतर $\left(2-\sqrt{3}\right)/\sqrt{10}\,s$ हो तो आनत तल के शीर्ष की ऊचाई .... मीटर है। $g = 10\ ms^{-2}$ लें।

Ans. 0.75

S. $$a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}g}{2}}{1+\frac{K^2}{R^2}}$$

$$a_{ring} = \frac{\frac{\sqrt{3}g}{2}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}g}{4}$$

$$a_{disc} = \frac{\frac{\sqrt{3}g}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{g}{\sqrt{3}}$$

$$t_{ring} = \sqrt{\frac{2.\frac{2h}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}g}{4}}} = \sqrt{\frac{4h}{\sqrt{3}}\frac{4}{\sqrt{3}g}} = \sqrt{\frac{16h}{3g}}$$

$$t_{disc} = \sqrt{\frac{2.\frac{2h}{\sqrt{3}}}{\frac{g}{\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{4h}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{g}} = \sqrt{\frac{4h}{g}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{h}{3g}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

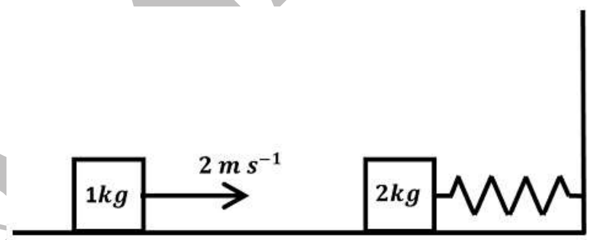
$$\Rightarrow \frac{4}{3}h=1$$

$$\Rightarrow h=\frac{3}{4}=0.75m$$

COM

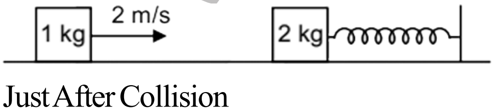
10. A spring-block system is resting on a frictionless floor as shown in the figure. The spring constant is 2.0 N m^{-1} and the mass of the block is 2.0 kg. Ignore the mass of the spring. Initially the spring is in an unstretched condition. Another block of mass 1.0 kg moving with a speed of 2.0 ms^{-1} collides elastically with the first block. The collision is such that the 2.0 kg block does not hit the wall. The distance, in metres, between the two blocks when the spring returns to its unstretched position for the first time after the collision is ....

एक कमानी गुटका निकाय एक घर्षण रहित फर्श पर विरामवस्था में है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। कमानी स्थिरांक 2.0 N m^{-1} है और गुटके का द्रव्यमान 2.0 kg है। कमानी के द्रव्यमान 1.0 kg है और चाल 2.0 ms^{-1} है पहले गुटके से प्रत्यास्थ संघट्ट करता है। इस संघट्ट के बाद 2.0 kg का गुटका दीवार से नहीं टकराता है। जब कमानी संघट्ट के बाद पहली बार अपनी अतानित स्थिति में वापस आती है, तब दोनों गुटकों के बीच की दुरी .... मीटर होगी.

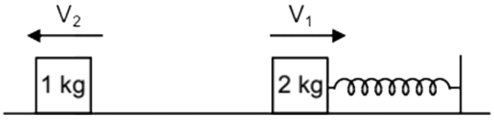


Ans. 2.09

S. Just Before Collision



Just After Collision



$V_1 + V_2 = 2$ .....(1)

$2V_1 - V_2 = 2$ .....(2)

$3V_1 = 4$

$\Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad V_2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ m/s

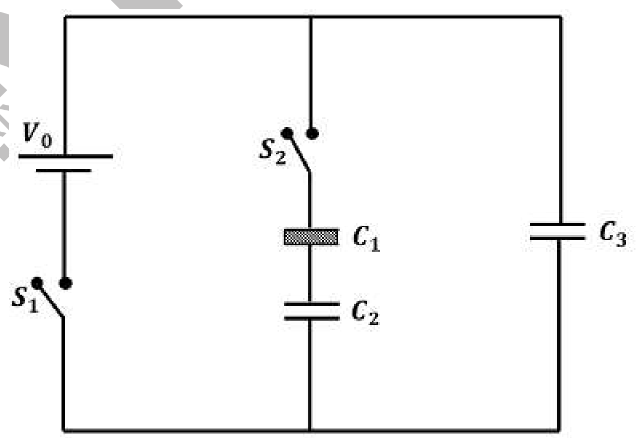
$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{2}} = \pi$ sec.

Distance $= \pi V_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{22}{7}\right)m = \frac{44}{21}m = 2.09$

Capacitance

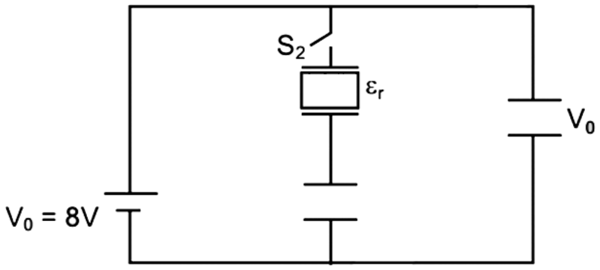
11. Three identical capacitors C_1, C_2 and C_3 have a capacitance of 1.0 μF each and they are uncharged initially. They are connected in a circuit as shown in the figure and C_1 is then filled completely with a dielectric material of relative permittivity $\in_r$. The cell electromotive force (emf) V_0 = 8 V. First the switch S_1 is closed while the switch S_2 is kept open. When the capacitor C_3 is fully charged, S_1 is opened and S_2 is closed simultaneously. When all the capacitors reach equilibrium, the charge on C_3 is found to be 5 μC. The value of $\in_r$ = ...

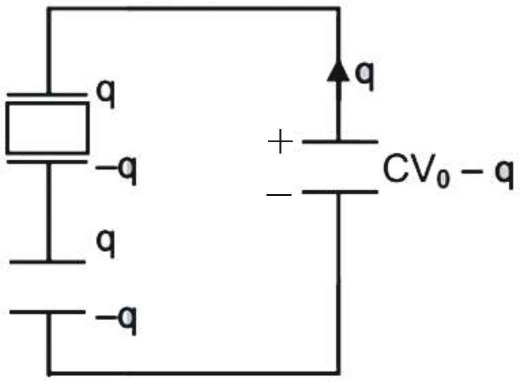
तीन एकसमान संधारित्रों (identical capacitors) C_1, C_2 तथा C_3 में प्रत्येक की धारिता 1.0 μF है और शुरूआत में तीनों सध ारित्रों अनावेशित (uncharged) है। तीनों संधारित्रों को, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है, एक परिपथ (circuit) में जोड़ा गया है और उसके बाद C_1 में $\in_r$ सापेक्ष परावैद्युतांक (relative permittivity) का एक परावैद्युत (dielectric) पदार्थ पूर्णतः भरा जाता है। सेल (cell) का विद्युत वाहक बल (electromotive force, emf) V_0 = 8 V है। शुरूआत में कुंजी (switch) S_1 बंद है और कुंजी S_2 खुली है। संधारित्र C_3 के पूरी तरह आवेशित (charged) होने के बाद, एक ही पल में एक साथ (simultaneously) कुंजी S_1 को खोल दिया जाता है और कुंजी S_2 को बंद कर दिया जाता है। जब सभी संधारित्र साम्यावस्था (equilibrium) में आ जाते है, तब संधारित्र C_3 पर 5 μC का आवेश पाया जाता है $\in_r$ का मान ...... है



Ans. 1.50

S.





$\frac{CV_0 - q}{C} - \frac{q}{\varepsilon_r C} - \frac{q}{C} = 0$ $\qquad$ $\frac{CV_0 - q}{C} = 5$

$5 = \frac{q}{C}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$ $\qquad$ $8C - q = 5C$

$= 3\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$ $\qquad$ $\Rightarrow q = 3C$

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{\varepsilon_r} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{2}{3}$

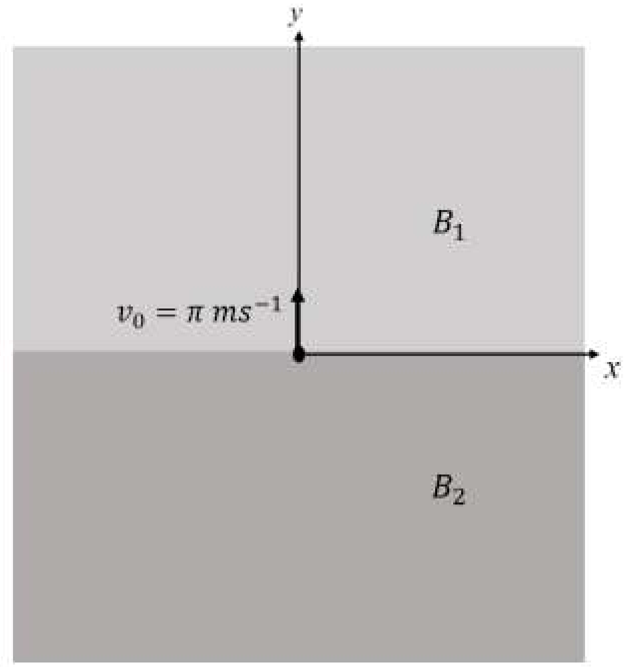
$\varepsilon_r = \frac{3}{2} = 1.5$

Magnetic field (EMF)

12. In the xy-plane, the region $y > 0$ has a uniform magnetic field $B_1\hat{k}$ and the region $y < 0$ has another uniform magnetic field $B_2\hat{k}$. A positively charged particle is projected from the origin along the positive y-axis with speed $v_0 = \pi\,m\,s^{-1}$ at $t = 0$, as shown in the figure. Neglect gravity in this problem. Let $t = T$ be the time when the particle crosses the x-axis from below for the first time. If $B_2 = 4B_1$, the average speed of the particle, in ms^{-1}, along the x-axis in the time interval T is ....

xy-तल में, $y > 0$ वाले भाग में एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र (uniform magnetic field) $B_1\hat{k}$ है और $y < 0$ वाले भाग में एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र $B_2\hat{k}$ है। एक धनात्मक आवेशित कण (positively charged particle) को मूल बिन्दु (origin) से $t = 0$ समय पर $v_0 = \pi\,m\,s^{-1}$ की चाल से +y अक्ष की दिशा से प्रक्षेपित किया जाता है (projected) जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है

कि इस प्रश्न में गुरूत्वाकर्षण की उपेक्षा कीजिये। समय $t = T$ पर कण x-अक्ष को नीचे से पहली बार पार करता है। यदि $B_2 = 4B_1$ हो तो T समयान्तराल में x-अक्ष की दिशा में कण की औसत चाल (average speed) .... ms^{-1} है।



S. 2.00

If average speed is considered along x-axis

$$R_1 = \frac{mv_0}{qB_1},\ R_2 = \frac{mv_0}{qB_2} = \frac{mv_0}{4qB_1}$$

$R_1 > R_2$

distance along x-axis $\Delta x = 2(R_1 + R_2) = \dfrac{5mv_0}{2qB_1}$

$$\text{Total time} = \frac{\pi m}{qB_1} + \frac{\pi m}{qB_2} = \frac{\pi m}{qB_1} + \frac{\pi m}{4qB_1} = \frac{5\pi m}{4qB_1}$$

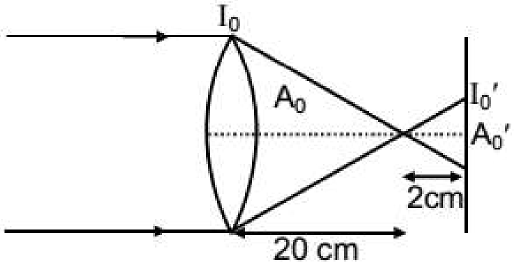
$$\text{Magnitude of average speed} = \frac{\dfrac{5mv_0}{2qB_1}}{\dfrac{5\pi m}{4qB_1}} = \frac{2v_0}{\pi} = 2 \text{ m/s}$$

Geometrical optics

13. Sunlight of intensity 1.3 kW m^{-2} is incident normally on a thin convex lens of focal length 20 cm. Ignore the energy loss of light due to the lens and assume that the lens aperture size is much smaller than its focal length. The average intensity of light, in kW m^{-2}, at a distance 22 cm from the lens on the other side is __________.

सूर्य प्रक्राश, जिसकी तीव्रता 1.3 kW m^{-2} है एक पतले उत्तल लेंस पर अभिलम्बवत् तरीके से आपतित होता है। लेंस की फोकस दुरी 20 cm है। लेंस द्वारा होने वाली प्रकाश की ऊर्जा के क्षय की उपेक्षा कीजिये और मान लिजिए कि लेंस का द्वारक माप उसकी फोकस दूरी से बहुत कम है। लेंस के दुसरी तरफ 22cm की दुरी पर प्रकाश की औसत तीव्रता ______________kW है।

Ans. 130.0



$$\frac{A_0'}{A_0} = \left(\frac{2}{20}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A_0' = \frac{A_0}{100}$$

$$\text{Intensity} = \frac{\text{Power}}{\text{Area}}$$

$$I_0A_0 = P = I_0'A_0'$$

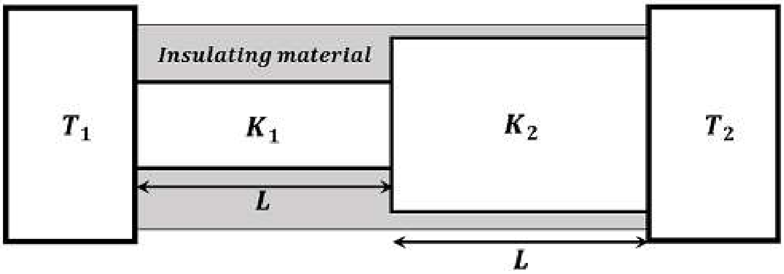
$$\Rightarrow I_0' = \frac{I_0A_0}{\frac{A_0}{100}} = 100I_0 = 130 \text{ kW/m}^2$$

HEAT TRANSFER

14. Two conducting cylinders of equal length but different radii are connected in series between two heat baths kept at temperatures $T_1 = 300$ K and $T_2 = 100$ K, as shown in the figure. The radius of the bigger cylinder is twice that of the smaller one and the thermal conductivities of the materials of the smaller and the larger cylinders are K_1 and K_2 respectively. If the temperature at the junction of the two cylinders in the steady state is 200 K, then K_1/K_2 =__________

समान लम्बाई परन्तु अलग–अलग त्रिज्याओं वाले दो बेलनाकार चालक (cylindrical conducting) श्रेणीक्रम में (in series) दो ऊष्माशयों (heat baths) के बीच में जोड़े गये है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। इन ऊष्माशयओं का तापमान $T_1 = 300$ K तथा $T_2 = 100$ K है। बड़े चालक की त्रिज्या छोटे चालक की त्रिज्या की दोगुनी है। छोटे चालक की ऊष्मा चालकता (thermal conductivity) K_1 है और बड़े चालक की ऊष्मा चालकता K_2 है। यदि स्थायी अवस्था (steady state) में, बेलनों

के संधि (junction) का तापमान 200 K हो तब K_1/K_2 का मान __________ होगा।



Ans.

S. 4.00

Since rate of heat flow is same, we can say

$$\frac{300-200}{R_1}=\frac{200-100}{R_2}$$

$$R_1 = R_2 \Rightarrow \frac{L_1}{K_1A_1}=\frac{L_2}{K_2A_2}$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{K_2}=\frac{A_2}{A_1}=4$$

SECTION 3 (MAXIMUM MARKS : 12)

This section contains TWO (02) paragraphs. Based on each paragraph, there are TWO (02) questions.

Each question has FOUR options. ONLY ONE of these four options corresponds to the correct answer.

For each question, choose the option corresponding to the correct answer.

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +3 If ONLY the correct option is chosen.

Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).

Negative Marks : -1 in all other cases.

UNIT & DIMENSIONS

PARAGRAPH "X"

In electromagnetic theory, the electric and magnetic phenomena are related to each other. Therefore, the dimensions of electric and magnetic quantities must also be related to each other. In the questions below, [E] and [B] stand for dimensions of electric and magnetic fields respectively, while $[\epsilon_0]$ and $[\mu_0]$ stand for dimensions of the permittivity and permeability of free space respectively. [L] and [T] are dimensions of length and time respectively. All the quantities are given in SI units.

(There are two questions based on PARAGRAPH "X", the question given below is one of them)

विद्युतचुम्बकीय सिद्धान्त के अनुसार विद्युत और चुम्बकीय परिघटनाओं (phenomena) के बीच संबंध होता है। इसलिए विद्युत और चुम्बकीय राशियों के विमाओं (dimensions) में भी संबंध होने चाहिये। निम्नलिखित प्रश्नों में [E] तथा [B] क्रमशः विद्युत

MATRIX

और चुम्बकीय क्षेत्रों की विमाओं को दर्शाते है, जबकि [$\in_0$] तथा [μ_0] क्रमशः मुक्त आकाश (free space) की परावैद्युतांक (permititivity) और चुम्बकशीलता (permeability) की विमाओं को दर्शाते है। [L] तथा [T] क्रमशः लम्बाई और समय की विमायें है। सभी राशियां SI मात्रकों (units) में दी गयी है।

(अनुच्छेद "X" पर दो प्रश्न आधारित है, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

15. The relation between [E] and [B] is

[E] तथा [B] के बीच में संबंध है –

(A) $[E] = [B]\,[L]\,[T]$

(B) $[E] = [B]\,[L]^{-1}\,[T]$

(C) $[E] = [B]\,[L]\,[T]^{-1}$

(D) $[E] = [B]\,[L]^{-1}\,[T]^{-1}$

S. C

In terms of dimension

$qE = qvB$

$E = vB$

$[E] = [B]\,[LT^{-1}]$

16. The relation between $[\in_0]$ and $[\mu_0]$ is :

$[\in_0]$ तथा $[\mu_0]$ के बीच में संबंध है –

(A) $[\mu_0] = [\in_0][L]^2[T]^{-2}$

(B) $[\mu_0] = [\in_0][L]^{-2}[T]^2$

(C) $[\mu_0] = [\in_0]^{-1}[L]^2[T]^{-2}$

(D) $[\mu_0] = [\in_0]^{-1}[L]^{-2}[T]^2$

S. D

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \in_0}}$$

$$C^2 = \frac{1}{\mu_0 \in_0}$$

$$\mu_0 = \in_0 . C^2$$

$$[\mu_0] = [\in_0]^{-1} L^{-2} T^2$$

Errors and Measurements

PARAGRAPH "A"

If the measurement errors in all the independent quantities are known, then it is possible to determine the error in any dependent quantity. This is done by the use of series expansion and truncating the expansion at the first power of the error. For example, consider the relation z = x/y. If the errors in x, y and z are Δx, Δy and Δz,

respectively, then

$$z+\Delta z=\frac{x\pm\Delta x}{y\pm\Delta y}=\frac{x}{y}\left(1\pm\frac{\Delta x}{x}\right)\left(1\pm\frac{\Delta y}{y}\right)^{-1}$$

The series expansion for $\left(1\pm\frac{\Delta y}{y}\right)^{-1}$, to first power in $\frac{\Delta y}{y}$, is $1\mp(\Delta y/y)$. The relative errors in independent variables are always added. So the error in z will be :

$$\Delta z=\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right)$$

The above derivation makes the assumption that $\Delta x/x<<1$, $\Delta y/y<<1$. Therefore, the higher powers of these quantities are neglected.

(There are two question based on PARAGRAPH "A", the question given below is one of them)

यदि सभी स्वतंत्र राशियों (independent quantities) की मापन त्रुटियां (measurement errors) ज्ञात हो तो किसी निर्भर राशि (dependent quantity) की त्रुटि का परिकलन (calculation) किया जा सकता है। इस परिकलन में श्रेणी प्रसार (series expansion) का प्रयोग किया जाता है और इस प्रसार को त्रुटि (error) के पहले घात (first power) पर रून्डित (truncate) किया जाता है। उदाहरण स्वरूप, सम्बन्ध $z=x/y$ में यदि x, y तथा z की त्रुटियां क्रमशः Δx, Δy तथा Δz हो तो –

$$z+\Delta z=\frac{x\pm\Delta x}{y\pm\Delta y}=\frac{x}{y}\left(1\pm\frac{\Delta x}{x}\right)\left(1\pm\frac{\Delta y}{y}\right)^{-1}$$

$\left(1\pm\frac{\Delta y}{y}\right)^{-1}$ का श्रेणी प्रसार, $\frac{\Delta y}{y}$ में पहले घात तक, $1\mp(\Delta y/y)$ है। स्वतंत्र राशियों की आपेक्षिक त्रुटियां (relative errors) सदैव जोड़ी जाती है। इसलिए z की त्रुटि होगी

$$\Delta z=\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right)$$

उपरोक्त परिलन में $\Delta x/x<<1$, $\Delta y/y<<1$ माने गये है। इसलिए इन राशियों की उच्चतर घातें (higher powers) उपेक्षित है।

(अनुच्छेद "A" पर दो प्रश्न आधारित है, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

17. Consider the ratio $r=\frac{(1-a)}{(1+a)}$ to be determined by measuring a dimensionless quantity a. If the error in the measurement of a is Δa ($\Delta a/a<<1$), then what is the error Δr in determining r ?

एक विमा–रहित (dimensionless) राशि a को माप कर, एक अनुपात (ratio) $r=\frac{(1-a)}{(1+a)}$ का परिकलन करना है। यदि a की मापन की त्रुटि Δa ($\Delta a/a<<1$) तो r के परिकलन की त्रुटि Δr क्या होगी ?

(A) $\frac{\Delta a}{(1+a)^2}$ (B) $\frac{2\Delta a}{(1+a)^2}$ (C) $\frac{2\Delta a}{(1-a^2)}$ (D) $\frac{2a\Delta a}{(1-a^2)}$

S. B

$r = \frac{1-a}{1+a}$

$ln\, r = ln(1-a) - ln\,(1+a)$

$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta a}{1-a} + \frac{\Delta a}{1+a}$

$\frac{\Delta r}{r} = \frac{2\Delta a}{1-a^2}$

$(1+a)\frac{\Delta r}{(1-a)} = \frac{2(\Delta a)}{(1-a^2)}$

$\Delta r = \frac{2\Delta r}{(1+a)^2}$

18. In an experiment the initial number of radioactive nuclei is 3000. It is found that 1000 ± 40 nuclei decayed in the first 1.0 s. For $|x| << 1$, $ln(1+x) = x$ up to first power in x. The error $\Delta\lambda$, in the determination of the decay constant λ, in S^{-1}, is :

एक प्रयोग के आरंभ में रेडियोएक्टिव नाभिकों की संख्या 3000 है। प्रयोग के पहले 1.0 सेकण्ड में 1000 ± 40 नाभिकों का क्षय हो जाता है। यदि $|x| << 1$ हो तो x के पहले घात तक $ln(1+x) = x$ है। क्षयांक (decay constant) λ के निर्धारण में त्रुटि $\Delta\lambda$ S^{-1} में है –

(A) 0.04 (B) 0.03 (C) 0.02 (D) 0.01

S. C

$N = N_0 e^{-\lambda t}$

$lnN = lnN_0 - \lambda t$

different w.r.t. λ

$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\lambda} = 0 - t$

$d\lambda = \frac{dN}{Nt} = \frac{40}{2000 \times 1} = 0.02$