JEE (ADVANCED) 2018 PAPER 1

PART-III MATHEMATICS

SECTION 1 (Maximum Marks: 24)

This section contains SIX (06) questions.

Each question has FOUR options for correct answer(s). ONE OR MORE THAN ONE of these four option(s) is (are) correct option(s).

Full Marks : +4 If only (all) the correct option(s) is (are) chosen.

Partial Marks : +3 If all the four options are correct but ONLY three options are chosen.

Partial Marks : +2 If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct options.

Partial Marks : +1 If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option.

Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered).

Negative Marks : –2 In all other cases.

For Example: If first, third and fourth are the ONLY three correct options for a question with second option being an incorrect option; selecting only all the three correct options will result in +4 marks. Selecting only two of the three correct options (e.g. the first and fourth options), without selecting any incorrect option (second option in this case), will result in +2 marks. Selecting only one of the three correct options (either first or third or fourth option) ,without selecting any incorrect option (second option in this case), will result in +1 marks. Selecting any incorrect option(s) (second option in this case), with or without selection of any correct option(s) will result in -2 marks.

Q.1 For a non-zero complex number z let arg(z) denote the principal argument with $-\pi < \arg(z) \le \pi$. Then, which of the following statement(s) is (are) FALSE ?

(A) $\arg(-1-i) = \frac{\pi}{4}$, where $i = \sqrt{-1}$

(B) The function $f: \mathbb{R} \to (-\pi,\pi)]$ defined by $f(t) = \arg(-1+it)$ for all $t \in \mathbb{R}$, is continuous at all points of $\mathbb{R}$, where $i = \sqrt{-1}$

(C) For any two non-zero complex numbers z_1 and z_2, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - \arg(z_1) + \arg(z_2)$ is an integer multiple of 2π

(D) For any three given distinct complex numbers z_1, z_2 and z_3, the locus of the point z satisfying the condition $\arg\left(\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right) = \pi$, lies on a straight line

किसी शून्येत्तर (non-zero) सम्मिश्र संख्या z के लिये, माना कि arg(z) इसके मुख्य कोणांक को दर्शाता है,

जहाँ $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ । तब निम्नलिखित में से कौनसा (से) कथन असत्य है (हैं) ?

(A) $\arg(-1-i) = \frac{\pi}{4}$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$

(B) फलन $f: \mathbb{R} \to (-\pi,\pi)]$, जो सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिये $f(t) = \arg(-1+it)$ के द्वारा परिभाषित है, $\mathbb{R}$ के सभी बिन्दुओं पर संतत है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$

(C) किन्ही भी दो शून्योत्तर सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - \arg(z_1) + \arg(z_2)$

2π का एक पूर्णांक गुणज है

(D) किन्ही भी तीन दी गयी भिन्न सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 तथा z_3 के लिये, प्रतिबंध $\arg\left(\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right) = \pi$,

को सन्तुष्ट करने वाले बिन्दु z का बिन्दुपथ एक सरल रेखा पर स्थित है।

Sol. (A) $\text{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$

(B) $f(t) = \text{Arg}(-1+it)$

$$\begin{cases} \pi - \tan^{-1} t & t \geq 0 \\ -(\pi + \tan^{-1} t) & t < 0 \end{cases}$$

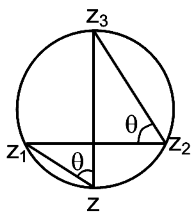
It is discontinuous at $t = 0$

(C) $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2$

$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}\, z_1 - \text{Arg}\, z_2 + 2n\pi$

so the expression becomes $2n\pi$

(D)



$\text{Arg}\left(\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right) = \pi$

If is circle

2. In a triangle PQR, let $\angle PQR = 30^\circ$ and the sides PQ and QR have lengths $10\sqrt{3}$ and 10, respectively. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) $\angle QPR = 45^\circ$

(B) The area of the triangle PQR is $25\sqrt{3}$ and $\angle QRP = 120^\circ$

(C) The radius of the incircle of the triangle PQR is $10\sqrt{3}-15$

(D) The area of the circumcircle of the triangle PQR is 100 π

एक त्रिभुज PQR में, माना कि $\angle PQR = 30^o$ और भुजाओं PQ और QR की लम्बाइयां क्रमशः $10\sqrt{3}$ और 10 हैं। तब निम्नलिखित में से कौनसा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) $\angle QPR = 45^o$

(B) त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल $25\sqrt{3}$ है और $\angle QRP = 120^o$

(C) त्रिभुज PQR के अंतवृत्त की त्रिज्या $10\sqrt{3}-15$ है

(D) त्रिभुज PQR के परिवृत्त का क्षेत्रफल 100 π है

Sol. $\cos Q = \dfrac{100+300-(PR)^2}{2.10.10\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{100+300-(PR)^2}{2-10.10\sqrt{3}}$

$300 = 400 - (PR)^2 \qquad \Rightarrow \quad PR = 10$

$\Delta = \dfrac{1}{2}(PQ)(QR)\sin Q = \dfrac{1}{2}10.10\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2} = 25\sqrt{3}$

$r = \dfrac{\Delta}{s} = \dfrac{25\sqrt{3}\times 2}{(20+10\sqrt{3})} = \dfrac{50\sqrt{3}}{20+10\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\times\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 5\left(2\sqrt{3}-3\right) = 10\sqrt{3}-15$

by sine rule $\dfrac{10\sqrt{3}}{\sin R} = \dfrac{10}{\sin Q} \qquad \Rightarrow \qquad \angle R = 30$

$2(\text{circumradius}) = \dfrac{PR}{\sin Q} = \dfrac{10}{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{circumradius} = 10$

Hence area of circumcircle $= \pi R^2 = 100\pi$

3. Let $P_1: 2x + y - z = 3$ and $P_2: x + 2y + z = 2$ be two planes. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) The line of intersection of P_1 and P_2 has direction ratios 1,2, –1

(B) The line $\dfrac{3x-4}{9} = \dfrac{1-3y}{9} = \dfrac{z}{3}$ is perpendicular to the line of intersection of P_1 and P_2

(C) The acute angle between P_1 and P_2 is 60^o

(D) If P_3 is the plane passing through the point (4, 2, –2) and perpendicular to the line of intersection of P_1 and P_2, then the distance of the point (2,1,1) from the plane P_3 is $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

माना कि $P_1: 2x + y - z = 3$ और $P_2: x + 2y + z = 2$ दो समतल हैं। तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) P_1 तथा P_2 की प्रतिच्छेदन रेखा के दिक्-अनुपात 1,2, –1 हैं

(B) रेखा $\dfrac{3x-4}{9} = \dfrac{1-3y}{9} = \dfrac{z}{3}$

P_1 और P_2 की प्रतिच्छेदन रेखा पर लम्बवत् है

(C) P_1 और P_2 के बीच का न्यून कोण 60^o है

(D) यदि समतल P_3 , बिन्दु (4, 2, –2) से गुजरता है तथा P_1 और P_2 की प्रतिच्छेदन रेखा के लम्बवत् है, तब बिन्दु (2,1,1) की समतल P_3 से दूरी $\frac{2}{\sqrt{3}}$ है

Sol. Direction ratio of common line is $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(3) - \hat{j}(3) + \hat{k}(3) = 3(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

(B) $\frac{x - 4/3}{3} = \frac{y - 1/3}{-3} = \frac{z}{3}$

This is || to line of intersection

(C) $\cos\theta = \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2}{|\vec{x}_1||\vec{x}_2|} = \frac{2+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$

(D) $P_3 : x - y + z = 1$ satisfy $(4, 2, -2)$

$4 - 2 - 2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x - y + z = 4$

distance of the point (2,1,1) from the plane $P_3 = \left|\frac{2-1+1-4}{\sqrt{3}}\right| \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}$

4. For every twice differentiable function $f : R \to [-2, 2]$ with $(f(0))^2 + (f'(0))^2 = 85$, which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) There exist $r, s \in R$, where $r < s$, such that f is one-one on the open interval (r, s)

(B) There exists $x_0 \in (-4, 0)$ such that $|f'(x_0)| \leq 1$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

(D) There exists $\alpha \in (-4, 4)$ such that $f(\alpha) + f''(\alpha) = 0$ and $f'(\alpha) \neq 0$

प्रत्येक द्विअवकलनीय फलन $f : R \to [-2, 2]$ with $(f(0))^2 + (f'(0))^2 = 85$, के लिये निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) ऐसे $r, s \in R$, जहाँ $r < s$, का अस्तित्व है जिनके लिये f खुले अन्तराल (r, s) पर एकैक है

(B) ऐसे $x_0 \in (-4, 0)$ का अस्तित्व है जिसके लिये $|f'(x_0)| \leq 1$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

(D) ऐसे $\alpha \in (-4, 4)$ का अस्तित्व है जिसके लिये $f(\alpha) + f''(\alpha) = 0$ और $f'(\alpha) \neq 0$

Sol. $f^2(0) + (f'(0))^2 = 85 \qquad f : R \to [-2, 2]$

(A) This is true of every non-constant continuous function

(B) $f'(c) = \frac{f(-4) - f(0)}{-4 - 0}$

$$|f'(c)| = \left|\frac{f(-4)-f(0)}{4}\right|$$

$$-2 \le f(-4) \le 2$$
$$-2 \le f(0) \le 2$$
$$-4 \le f(-4) - f(0) \le 4$$

This $|f'(c)| \le 1$

(C) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

Note f(x) should have a bound ∞ which can be concluded by considering

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\sqrt{85}\ x}{2}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{85}\cos\left(\frac{\sqrt{85}\ x}{2}\right)$$

$f^2(0) + (f'(0)^2) = 85$

and $\lim_{x\to\infty} f(x)$ does not exist

(D) Consider $H(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$

$H(0) = 85$

By (B) choice there exists some x_0 such that $(f'(x_0))^2 \le 1$ for some x_0 in $(-4, 0)$

hence $H(x_0) = f^2(x_0) + (f'(x_0))^2 \le 4 + 1$

$H(x_0) \le 5$

Hence let $p \in (-4, 0)$ for which $H(p) = 5$

(note that we have considered p as largest such negative number)

similarly let q be smallest positive number $\in (0, 4)$ such that $H(q) = 5$

Hence By Rolle's theorem is (p, q)

$H'(c) = 0$ for some $c \in (-4, 4)$ and since H(x) is greater than 5 as we move from $x = p$ to $x = q$ and $f^2(x) \le 4$

$\Rightarrow$ $(f'(x))^2 \ge 1$ in (p, q)

Thus $H'(c) = 0 \Rightarrow$ $f'f + f'f'' = 0$

so $f + f'' = 0$ and $f' \ne 0$

5. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be two non-constant differentiable functions. If

$f'(x) = \left(e^{(f(x)-g(x))}\right)g'(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$

and $f(1) = g(2) = 1$, then which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

माना कि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ और $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ दो चर और अवकलनीय फलन हैं। यदि

$f'(x) = \left(e^{(f(x)-g(x))}\right)g'(x)$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिये

और $f(1) = g(2) = 1$, तब निम्नलिखित में से कौनसा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) $f(2) < 1 - \log_e 2$ (B) $f(2) > 1 - \log_e 2$ (C) $g(1) > 1 - \log_e 2$ (D) $g(1) < 1 - \log_e 2$

Sol. $f'(x) = e^{f(x)-g(x)} g'(x) : f(1) = g(2) = 1$

$e^{-f(x)} = e^{-g(x)} + c$

$e^{-f(x)} . f'(x) = e^{-g(x)} . g'(x)$

$\int d(e^{-f(x)}) = \int d(e^{-g(x)})$

$e^{-f(x)} = e^{-g(x)} + c$

$x = 1 \quad \frac{1}{e} = e^{-g(1)} + c$

$x = 2 \quad e^{-f(2)} = \frac{1}{e} + c$

$e^{-1} - e^{-f(2)} = e^{-g(1)} - e^{-1}$

$\Rightarrow \quad e^{-g(1)} + e^{-f(2)} = 2e^{-1}$

$e^{-g(1)} < 2e^{-1}$

$-g(1) < \ln 2 - 1$

$\therefore \quad g(1) > 1 - \ln 2$

Similarly $e^{-f(2)} = 2e^{-1} - e^{-g(1)}$

$f(2) > 1 - \ln 2$

6. Let $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be a continuous fucntion such that

$$f(x) = 1 - 2x + \int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt$$

for all $x \in [0, \infty)$. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) The curve $y = f(x)$ passes through the point $(1, 2)$

(B) The curve $y = f(x)$ passes through the point $(2, -1)$

(C) The area of the region $\left\{(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : f(x) \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$ is $\frac{\pi - 2}{4}$

(D) The area of the region $\left\{(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : f(x) \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$ is $\frac{\pi - 1}{4}$

माना कि $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ एक ऐसा संतत फलन है कि

$$f(x) = 1 - 2x + \int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt$$

सभी $x \in [0, \infty)$ के लिये। तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) वक्र $y = f(x)$ बिन्दु $(1, 2)$ से गुजरता है

(B) वक्र $y = f(x)$ बिन्दु $(2, -1)$ से गुजरता है

(C) क्षेत्र $\left\{(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : f(x) \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$ का क्षेत्रफल $\frac{\pi - 2}{4}$ है

(D) क्षेत्र $\left\{(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : f(x) \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$ का क्षेत्रफल $\frac{\pi - 1}{4}$ है

Sol. $f(x) = 1 - 2x + \int_0^x e^{x-t} f(t)dt \quad \Rightarrow f(x).e^{-x} = (1-2x).e^{-x} + \int_0^x e^{-t} f(t)dt$

$\Rightarrow \quad f'(x)e^{-x} - e^{-x} . f(x) = -2 . e^{-x} - (1-2x) . e^{-x} + e^{-x} . f(x)$

$\Rightarrow \quad f'(x) - 2f(x) = (2x - 3)$

I.F. $= e^{-2x}$

$\therefore \quad y.e^{-2x} = \int \underset{I}{(2x-3)}.\underset{II}{e^{-2x}}\, dx$

$\Rightarrow \quad y.e^{-2x} = (2x-3).\frac{e^{-2x}}{-2} - 2\int \frac{e^{-2x}}{-2} dx \qquad \Rightarrow \quad y.e^{-2x} = -\frac{(2x-3)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + c$

$\Rightarrow \quad y.e^{-2x} = -\frac{-(2x-3)-1}{2} + c.e^{2x} \qquad \Rightarrow \quad y = (1-x) + c.e^{2x}$

$\Rightarrow \quad y = (1-x) + c.\, e^{2x}$

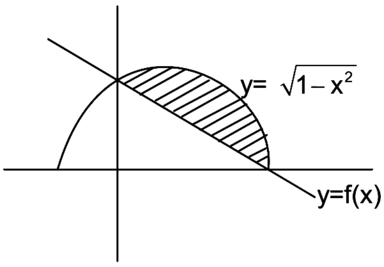
put $x = 0$

$1 = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$\therefore \quad y = 1 - x$ which passes through point $(2, -1)$

for options C & D

Now



required area $= \frac{1}{4}.\pi.(1)^2 - \frac{1}{2}.1.1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

7. The value of $\left((\log_2 9)^2\right)^{\frac{1}{\log_2(\log_2 9)}} \times \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{\log_4 7}}$ is _____.

$\left((\log_2 9)^2\right)^{\frac{1}{\log_2(\log_2 9)}} \times \left(\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{\log_4 7}}$ का मान है _____.

Sol. $\left((\log_2 9)^2\right)^{\frac{1}{\log_2(\log_2 9)}} \times \left(\sqrt{7}\right)^{\log_7 4}$

$(\log_2 9)^{2\log_{(\log_2 9)} 2}.(2) = 4.2 = 8$

8. The number of 5 digit numbers which are divisible by 4, with digits from the set $\{1,2,3,4,5\}$ and the repetition of digits is allowed, is _____ .

उन 5 अंकीय (digit) संख्याओं, जो 4 से विभाज्य है, जिनके अंक समुच्चय $\{1,2,3,4,5\}$ में से हैं और अंको की पुनरावृत्ति की अनुमति है, की संख्या है _____ ।.

Sol. Last two digits are 12, 32, 24, 52, 44

Number of numbers = 5 × 5 × 5 × 5 = 625

9. Let X be the set consisting of the first 2018 terms of the arithmetic progression 1,6,11,... , and Y be the set consisting of the first 2018 terms of the arithmetic progression 9,16,23, ... Then, the number of elements in the set $X \cup Y$ is _____.

माना कि X समान्तर श्रेणी (arithmetic progression) 1,6,11,... के प्रथम 2018 पदों का समुच्चय हैऌऔर Y समान्तर श्रेणी 9,16,23, ... के प्रथम 2018 पदों का समुच्चय है। तब समुच्चय $X \cup Y$ में अवयवों की संख्या है _____ ।

Sol. $X = \{1, 6, 11, ...\}$

$Y = \{9, 16, 23, ...\}$

Common terms : 16, 51, 86, ...

$t_p = 16 + (p - 1)35 = 35p - 19 \le 10086$

$\Rightarrow p \le 288.7$

$\therefore\ n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$

$= 2018 + 2018 - 288$

$= 3748$

10. The number of real solutions of the equation

$$\sin^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^{i+1} - x\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i\right) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{\infty}(-x)^i\right)$$

lying in the interval $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ is_____.

(Here, the inverse trigonometric functions $\sin^{-1}x$ and $\cos^{-1}x$ assume values in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ and $[0, \pi]$, respectively.)

समीकरण

$$\sin^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^{i+1} - x\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i\right) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{\infty}(-x)^i\right)$$

के उन वास्तविक हलों की संख्या जो अन्तराल $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ में विद्यमान हैं, है ______ .

(यहाँ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन $\sin^{-1}x$ और $\cos^{-1}x$ क्रमशः $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ व $[0, \pi]$ में मान धारण करते हैं।)

Sol. $$\lim_{x\to\infty}\sin^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x^{i+1} - x\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^i\right) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to\infty}\cos^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{x}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{n}(-x)^i\right)$$

$$\left(\frac{x^2}{1-x}-x\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)=\frac{x}{1+x}+\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)}{1+\frac{x}{2}}$$

$$\frac{x^2}{1-x}-\frac{x^2}{2-x}=\frac{x}{1+x}-\frac{x}{2+x}$$

$$\frac{x(1+x)-(1-x)}{1-x^2}=\frac{2x+x^2-2+x}{4-x^2}\text{ or } x=0$$

$$\frac{x^2+2x-1}{1-x^2}=\frac{x^2+3x-2}{4-x^2}$$

$\Rightarrow$ $x^3+2x^2+5x-2=0$

Let $f(x)=x^3+2x^2+5x-2$

$f'(x)>0$

$f(0)=-2$ and $f(1/2)=9/8$ so one root in $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ 2 roots

11. For each positive integer n, let

$$y_n=\frac{1}{n}\left((n+1)(n+2)...(n+n)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

For $x\in\mathbb{R}$, let [x] be the greatest integer less than or equal to x. If $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=L$, then the value of [L] is______

प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिये, माना कि

$$y_n=\frac{1}{n}\left((n+1)(n+2)...(n+n)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

$x\in\mathbb{R}$ के लिये माना कि [x], x से छोआ या x के बराबर महत्तम पूर्णांक है। यदि $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=L$, तब [L] का मान है ______

Sol. $y_n=\left(\frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n}.......\frac{n+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\log L=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\log\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\log(1+x)dx=\int_1^2\log x\,dx=|x\log x-x|_1^2=2\log 2=\log\frac{4}{e}$$

$\Rightarrow$ $L=\frac{4}{e}$ $\Rightarrow$ $[L]=1$

12. Let $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be two unit vectors such that $\vec{a}.\vec{b}=0$. For some x, y ∈R, let $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{b})$. If $|\vec{c}|=2$ and the vector $\vec{c}$ is inclined at the same angle α to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$, then the value of $8\cos^2\alpha$ is _____ .

माना कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो ऐसे इकाई सदिश हैं कि $\vec{a}.\vec{b}=0$ । किन्ही x, y ∈R के लिये माना कि $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{b})$ । यदि $|\vec{c}|=2$ और सदिश $\vec{c}$ सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के साथ समान कोण α बनाता है, तब $8\cos^2\alpha$ का मान है ______ .

Sol. $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}$ & $\vec{a}.\vec{b}=0$

$\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\alpha$

$\vec{c}.\vec{a}=\vec{c}.\vec{b}=2\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad x=y=2\cos\alpha$

$|\vec{c}|^2=x^2+y^2+|\vec{a}\times\vec{b}|^2=2(4\cos^2\alpha)+1-0$

$4=8\cos^2\alpha+1 \quad\Rightarrow\quad 8\cos^2\alpha=3$

13. Let a, b, c be three non-zero real numbers such that the equation $\sqrt{3}a\cos x+2b\sin x=c, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, has two distinct real roots α and β with $\alpha+\beta=\pi/3$. Then, the value of b/a is _____ .

माना कि a, b, c ऐसी तीन शून्येत्तर वास्तविक संख्याऐं हैं जिनके लिये समीकरण $\sqrt{3}a\cos x+2b\sin x=c, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, के दो भिन्न वास्तविक मूल α और β हैं, जहाँ $\alpha+\beta=\pi/3$. तब b/a का मान है।

Sol. $\sqrt{3}\,a\cos x+2b\sin x=c \qquad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$\sqrt{3}\,a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+2b\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=c,\ \text{where } t=\tan\frac{x}{2}$

$\sqrt{3}\,a(1-t^2)+4bt=c(1+t^2)$

$t^2(c+\sqrt{3}\,a)-4bt+c-\sqrt{3}\,a=0$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \frac{t_1+t_2}{1-t_1t_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{4b}{c+\sqrt{3}\,a-c+\sqrt{3}\,a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

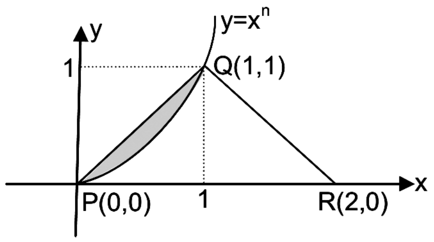
$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$

14. A farmer F_1 has a land in the shape of a triangle with vertices at P(0,0), Q(1,1) and R(2,0). From this land, a neighbouring farmer F_2 takes away the region which lies between the side PQ and a curve of the form $y=x^n$ (n > 1). If the area of the region taken away by the farmer F_2 is exactly 30% of the area of ΔPQR, then the value of n is _____ .

एक किसान F_1 के पास एक त्रिभुजाकार भूमि है जिसके शीर्ष P(0,0), Q(1,1) तथा R(2,0) पर हैं। एक पड़ोसी किसान F_2 इस भूमि से उस क्षेत्र को ले लेता है जो कि भुजा PQ और $y=x^n$ (n > 1) के रूप वाले वक्र के बीच स्थित है। यदि किसान F_2 द्वारा लिये

गये क्षेत्र का क्षेत्रफल ΔPQR के क्षेत्रफल का ठीक 30% है, तब n का मान है।

Sol.



$$\int_0^1 (x-x^n)\,dx = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad n=4$$

Paragraph "X"

Let S be the circle in the xy-plane defined by the equation $x^2 + y^2 = 4$.

(There are two questions based on PARAGRAPH "X", the question given below is one of them)

माना कि S एक वृत्त है जो xy-समतल में समीकरण $x^2 + y^2 = 4$ के द्वारा परिभाषित है।

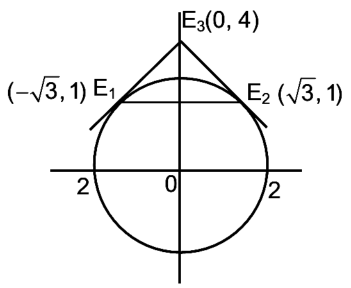
(अनुच्छेद "X" पर दो प्रश्न आधारित हैं, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

15. Let E_1E_2 and F_1F_2 be the chords of S passing through the point P_0 (1,1) and parallel to the x-axis and the y-axis, respectively. Let G_1G_2 be the chord of S passing through P_0 and having slope –1. Let the tangents to S at E_1 and E_2 meet at E_3, the tangents to S at F_1 and F_2 meet at F_3, and the tangents to S at G_1 and G_2 meet at G_3. Then, the points E_3, F_3, and G_3 lie on the curve

माना कि E_1E_2 और F_1F_2 वृत्त S की ऐसी जीवायें हैं जो बिन्दु P_0 (1,1) से गुजरती हैं और क्रमशः x-अक्ष व y-अक्ष के समान्तर हैं। माना कि G_1G_2 की वह जीवा है जो P_0 से गुजरती है और जिसकी प्रवणता –1 है। माना कि E_1 और E_2 पर S की स्पर्शियाँ E_3 पर मिलती हैं, F_1 और F_2 पर S की स्पर्शियाँ F_3 पर मिलती हैं, तथा G_1 और G_2 पर S की स्पर्शियाँ G_3 पर मिलती हैं। तब वह वक्र जिस बिन्दु E_3, F_3, और G_3 स्थित हैं, है –

(A) $x + y = 4$
(B) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$
(C) $(x-4)(y-4) = 4$
(D) $xy = 4$

Sol. Tangent at E_1 and E_2 are $-\sqrt{3}x + y = 4$ and $\sqrt{3}x + y = 4$
They intersect at E_3 (0, 4)



$F_1(1, \sqrt{3})$, $F_2(1, -\sqrt{3})$, F_3 (4, 0)
$G_1(0, 2)$, $G_2(2, 0)$, $G_3(2, 2)$

E_3 F_3, G_3 lie on line x + y = 4

16. Let P be a point on the circle S with both coordinates being positive. Let the tangent to S at P intersect the coordinate axes at the points M and N. Then, the mid-point of the line segment MN must lie on the curve

माना कि P वृत्त S पर स्थित एक ऐसा बिन्दु है जिसके दोनों निर्देशांक धनात्मक हैं माना कि वृत्त S के बिन्दु P पर स्पर्शी निर्देशांक अक्षों को बिन्दुओं M और N पर प्रतिच्छेद करती है। तब वह वक्र जिस पर रेखाखण्ड MN का मध्य बिन्दु अनिवार्य रूप से स्थित है, है &

(A) $(x + y)^2 = 3$ (B) $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{4/3}$ (C) $x^2 + y^2 = 2xy$ (D) $x^2 + y^2 = x^2 y^2$

Sol. Let P(2 cos θ, 2 sin θ)

Tangent is x cos θ + y sin θ = 2

$$M\left(\frac{2}{\cos\theta}, 0\right), N\left(0, \frac{2}{\cos\theta}\right)$$

$$x = \frac{1}{\cos\theta} \text{ and } y = \frac{1}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = x^2y^2$$

Paragraph "A"

There are five students S_1, S_2, S_3, S_4 and S_5 in a music class and for them there are five seats R_1, R_2,R_3 R_4 and R_5 arranged in a row, where initially the seat R_i is allotted to the student S_i, i = 1, 2, 3, 4, 5. But, on the examination day, the five students are randomly allotted the five seats.

(There are two questions based on PARAGRAPH "A", the question given below is one of them)

एक संगीत की कक्षा में पाँच छात्र S_1, S_2, S_3, S_4 और S_5 हैं और उनके लिए बैठने के पाँच स्थान R_1, R_2,R_3 R_4 और R_5 एक पंक्ति में व्यवस्थित हैं, जहाँ शुरूआत में स्थान R_i छात्र S_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 को आवंटित किया जाता है। लेकिन परीक्षा के दिन, पाँचों छात्रों को पाँच स्थान यादृच्छिक आवंटित किये जाते हैं।

(अनुच्छेद "A" पर दो प्रश्न आधारित हैं, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है।)

17. The probability that, on the examination day, the student S_1 gets the previously allotted seat R_1, and NONE of the remaining students gets the seat previously allotted to him/her is :

परीक्षा के दिन छात्र S_1 को उसका पूर्व आंवटित स्थान R_1 मिलने तथा शेष छात्रों में से किसी को भी उसका पूर्व आवंटित स्थान नहीं मिलने की प्रायिकता है :

(A) 3/40 (B) 1/8 (C) 7/40 (D) 1/5

Sol. $$\text{Probability} = \frac{4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)}{5!} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}$$

18. For i = 1, 2, 3, 4, let T_i denote the event that the students S_i and S_{i+1} do NOT sit adjacent to each other on the day of the examination. Then, the probability of the event $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4$ is :

माना कि T_i (i = 1, 2, 3, 4) उस घटना को दर्शाता है कि परीक्षा के दिन छात्र S_i और S_{i+1} एक दूसरे के साथ–साथ नहीं बैठते हैं। तब घटना $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4$ की प्रायिकता है :

(A) 1/15 (B) 1/10 (C) 7/60 (D) 1/5

Sol. Total cases = 5!

favorable ways = 14

$$\left.\begin{matrix} \underline{1} & \underline{3} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{4} \\ \underline{1} & \underline{4} & \underline{2} & \underline{5} & \underline{3} \end{matrix}\right\} \rightarrow 2$$

$5 \rightarrow 2$

$\underline{2} \quad \underline{4} \quad \underline{1} \quad .... \quad .... \rightarrow 2$

$\underline{2} \quad \underline{5} \quad \underline{3} \quad \underline{1} \quad \underline{4} \quad \rightarrow 1$

$4 \quad \rightarrow 3$

$$\left.\begin{matrix} \underline{3} & \underline{1} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{4} \\ \underline{3} & \underline{1} & \underline{4} & \underline{2} & \underline{5} \end{matrix}\right\} \rightarrow 2$$

$\underline{3} \quad \underline{5} \quad ... \quad ... \quad ... \} \rightarrow 2$

$= 14$

$$\text{Probability} = \frac{14}{120}$$