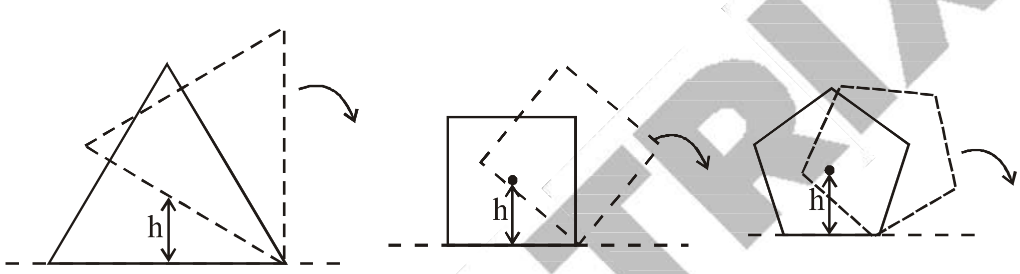
PART I : PHYSICS

SECTION-I (Maximum Marks : 18)

1. Consider regular polygons with number of sides $n = 3, 4, 5$ as shown in the figure. The center of mass of all the polygons is at height h from the ground. They roll on a horizontal surface about the leading vertex without slipping and sliding as depicted. The maximum increase in height of the locus of the center of mass for each polygon is Δ. Then Δ depends on n and h as :

चित्र द्वारा दर्शाये समबहुभुजों की भुजाओं की संख्या $n = 3, 4, 5$ है। सभी बहुभुजओं की सहंति केन्द्र अनुभूमित तल से h ऊँचाई पर है। ये बिना फिसले क्षितिज तल पर प्रतिगामी शीर्ष (leading vertex) के चारों ओर घूर्णन कर अग्रसरित हो रहे हैं। प्रत्येक बहुभुज के संहति केन्द्र के रेखापथ (locus) की ऊँचाई की अधिकतम वृद्धि Δ है। तब Δ की h तथा h पर निर्भरता निम्न में से दी जायेगी:



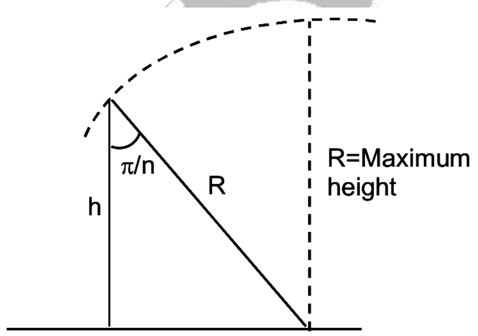
(A) $\Delta = h\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(B) $\Delta = h\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

(C) $\Delta = h\tan^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

(D) $\Delta = h\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right)$

Sol.



$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{R}$$

$$\Delta = R - h = \frac{h}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - h$$

$$= h\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-1}\right]$$

2. Consider an expanding sphere of instantaneous radius R whose total mass remains constant. The expansion is such that the instantaneous density ρ remains uniform throughout the volume. The rate of fractional change in density $\left(\frac{1}{\pi}\frac{d\rho}{dt}\right)$ is constant. The velocity v of any point on the surface of the expanding sphere is proportional to :

एक प्रसारी गोले (expanding sphere) की तात्क्षणिक (instantaneous) त्रिज्या R एवं द्रव्यमान M अचर रहते हैं। प्रसार के दौरान इसका तात्क्षणिक घनत्व ρ पूरे आयतन में एकसमान रहता है एवं आंशिक घनत्व की दर $\left(\frac{1}{\pi}\frac{d\rho}{dt}\right)$ अचर (constant) है। इस प्रसारी गोले के पृष्ठ पर एक बिन्दु का वेग v निम्न के समानुपाती होगाः

(A) R (B) $\frac{1}{R}$ (C) R^3 (D) $R^{2/3}$

Sol. $m = \frac{4\pi R^3}{3} \times \rho$

$l\,n(m) = l\,n\left(\frac{4\pi}{3}\right) + ln(\rho) + 3l\,n(R)$

$0 = 0 + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{R}\frac{dR}{dt}$

$\Rightarrow \left(\frac{dR}{dt}\right) = v \propto -R \times \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$

$v \propto R$

3. A photoelectric material having work-function ϕ_0 is illuminated with light of wavelength $\lambda\left(\lambda < \frac{hc}{\phi_0}\right)$. The fastest photoelectron has a de Broglie wavelength λ_d. A change in wavelength of the incident light by $\Delta\lambda$ results in a change $\Delta\lambda_d$ in λ_d. Then the ratio $\Delta\lambda_d/\Delta\lambda$ is proportional to

प्रकाश विद्युत पदार्थ (photoelectric material) जिसका कार्यफलन (work-function) ϕ_0 है, तरंगदैर्ध्य $\lambda\left(\lambda < \frac{hc}{\phi_0}\right)$ के प्रकाश से प्रदीप्त किया गया है। द्रुत प्रकाश इलेक्ट्रॉन की डी ब्रोग्ली (de Broglie) तरंगदैर्ध्य λ_d है। आपतित प्रकाश की तरंगदैर्ध्य में $\Delta\lambda$ के परिवर्तन λ_d के मान में $\Delta\lambda_d$ का परिवर्तन होता है। तब $\Delta\lambda_d/\Delta\lambda$ का अनुपात समानुपाती होगाः

(A) λ_d^2/λ^2 (B) λ_d/λ (C) λ_d^3/λ (D) λ_d^3/λ^2

Sol. $\frac{hc}{\lambda} = W + WE_{max}$

$$KE = \frac{P^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_d^2}$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \phi_0 + \frac{h_2}{2m_e\lambda_d^2}$$

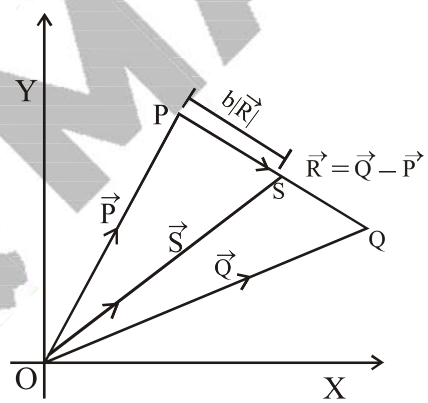
$$-\frac{hc}{\lambda^2}d\lambda = 0 + \frac{h_2}{2m_e}\frac{(-2)}{\lambda_d^3}d\lambda_d$$

$$\frac{d\lambda_d}{d\lambda} = \frac{2m_e\lambda_d^3}{h^2 \times \lambda^2}.hc$$

$$\frac{d\lambda_d}{d\lambda} \propto \frac{\lambda_d^3}{\lambda^2}$$

4. Three vectors $\vec{P}$, $\vec{Q}$ and $\vec{R}$ are shown in the figure. Let S be any point on the vector $\vec{R}$. The distance between the points P and S is $b|\vec{R}|$. The general relation among vectors $\vec{P}$, $\vec{Q}$ and $\vec{S}$ is

तीन सदिश $\vec{P}$, $\vec{Q}$ तथा $\vec{R}$ चित्र द्वारा दर्शाए गए हैं। सदिश $\vec{R}$ पर एक बिन्दु S दर्शा गया है। बिन्दु P व बिन्दु S के मध्य की दूरी $b|\vec{R}|$ है। $\vec{P}$, $\vec{Q}$ तथा $\vec{S}$ के सदिशों के मध्य संबंध है:



(A) $\vec{S} = (1-b^2)\vec{P} + b\vec{Q}$ (B) $\vec{S} = (b-1)\vec{P} + b\vec{Q}$

(C) $\vec{S} = (1-b)\vec{P} + b\vec{Q}$ (D) $\vec{S} = (1-b)\vec{P} + b^2\vec{Q}$

Sol. $\vec{S} = \vec{P} + b\vec{R} = \vec{P} + b(\vec{Q} - \vec{P}) = \vec{P}(1-b) + b\vec{Q}$

5. A person measures the depth of a well by measuring the time interval between dropping a stone and receiving the sound of impact with the bottom of the well. The error in his measurement of time is $\delta T = 0.01$ seconds and he measures the depth of the well to be $L = 20$ meters. Take the acceleration due to gravity $g = 10\ ms^{-2}$ and the velocity of sound is $300\ ms^{-1}$. Then the fractional error in the measurement, $\delta L/L$, is closest to :

एक व्यक्ति एक पत्थर को कूऐं में गिराते समय और कुएं की तली में संघट से उत्पन्न ध्वनि के समय अंतराल का मापन करके कुऐं की गहराई का पता लगाता है। वह समयांतराल के मापन में त्रुटि $\delta T = 0.01$ सेकेण्ड एवं कुऐं की गहराई $L = 20$ m मापता है। गुरूत्वाकर्षण त्वरण $g = 10\ ms^{-2}$ एवं ध्वनि की गति $300\ ms^{-1}$ दी गयी है। $\delta L/L$ के मापन में निकटतम आंशिक त्रुटि (fractional error) है:

(A) 1% (B) 5% (C) 3% (D) 0.2%

sol. $t = \sqrt{\frac{L}{5}} + \frac{L}{300}$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2}L^{-1/2}dL + \left(\frac{1}{300}dL\right)$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{20}}dL + \frac{dL}{300} = 0.01$$

$$dL\left[\frac{15}{300}\right] = 0.01$$

$$dL = \frac{3}{16}$$

$$\frac{dL}{L}\times 100 = \frac{3}{16}\times\frac{1}{20}\times 100 = \frac{15}{16} \simeq 1\%$$

6. A rocket is launched normal to the surface of the Earth, away from the Sun, along the line joining the Sun and the Earth. The Sun is 3×10^5 times heavier than the Earth and is at a distance 2.5×10^4 times larger than the radius of the Earth. The escape velocity from Earth's gravitational field is $v_e = 11.2$ km s^{-1}. The minimum initial velocity (v_s) required for the rocket to be able to leave the Sun-Earth system is closest to

(Ignore the rotation and revolution of the Earth and the presence ofany other planet)

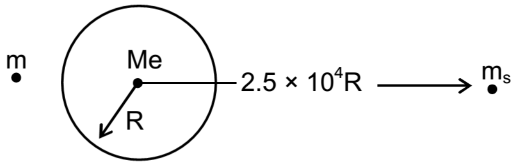
रॉकेट भूतल के अभिलम्बवत सूर्य एवं पृथ्वी को जोड़ने वाली रेखा में सूर्य से दूर की तरफ (radially outward from the direction of the sun) प्रक्षेपित किया गया है। सूर्य पृथ्वी से 3×10^5 गुना भारी है एवं त्रिज्या से 2.5×10^4 गुनी दूरी पर स्थित है। पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र के लिए पलायन गति 11.2 km s^{-1} है। रॉकेट को सूर्य एवं पृथ्वी निकाय (Sun-earth system) के गुरूत्वाकर्षण से मुक्त होने के लिए कम से कम प्रारम्भिक वेग (v_s) का निकटतम मान है

(पृथ्वी की चक्रीय गति और परिभ्रमण तथा किसी अन्य ग्रह की उपस्थिति की उपेक्षा करें)

(A) $v_s = 72$ km s^{-1} (B) $v_s = 22$ km s^{-1}

(C) $v_s = 42$ km s^{-1} (D) $v_s = 62$ km s^{-1}

Sol.



Given $\sqrt{\frac{RGM_e}{R}} = 11.2 \text{km/s}$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_e}{R} - \frac{GM_s m}{2.5\times10^4 R} \ge 0$$

for $v = v_e$

$$v_e^2 = \frac{2GM_e}{R} + \frac{2GM_s}{2.5\times10^4 R}$$

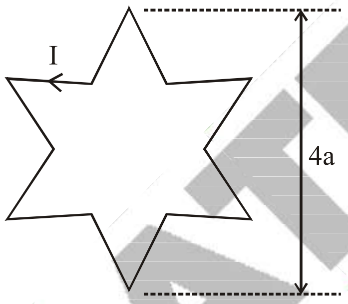
$$= \frac{2GM_e}{R} + \frac{6\times10^5 GM_e}{2.5\times10^4 R}$$

$$=\frac{GM_e}{R}(2+24)$$

$$=\sqrt{\frac{26GM_e}{R}}=40.4\,\text{km/sec}.$$

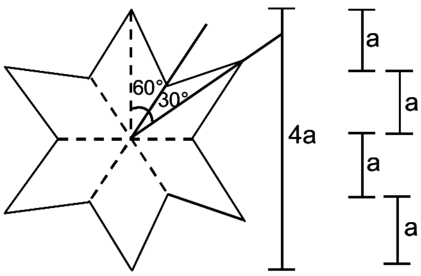
7. A symmetric star shaped conducting wire loop is carrying a steady state current I as shown in the figure. The distance between the diametrically opposite vertices of the star is 4a. The magnitude of the magnetic field at the center of the loop is :

जैसे की चित्रित किया गया है, एक सम्मिश्र तारे (symmetric star) के आकार के चालक में अपरिवर्तित धारा I बह रही है। यहाँ विपरीत शीर्षों (diametrically opposite vertices) के बीच दूरी 4a है। चालक के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र का मान होगा:



(A) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}6\left[\sqrt{3}-1\right]$ (B) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}6\left[\sqrt{3}+1\right]$ (C) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}3\left[\sqrt{3}-1\right]$ (D) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}3\left[2-\sqrt{3}\right]$

Sol.



Total Magnetic Field
at centre = 12 times magnetic field due to one wire

$$B=\frac{12\mu_0 I}{4\pi a}[\sin 60^\circ-\sin 30^\circ]=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\times 12\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right]$$

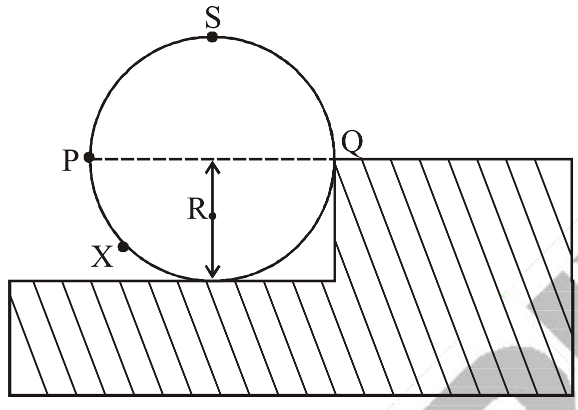
$$\Rightarrow \quad B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\times 6\left(\sqrt{3}-1\right)$$

SECTION-II (Maximum Marks : 32)

8. A wheel of radius R and mass M is placed at the bottom of a fixed step of height R as shown in the figure. A constant force is continuously applied on the surface of the wheel so that it just climbs the step without slipping. Consider the torque τ about an axis normal to the plane of the paper passing through the point Q. Which of the following options is/are correct?

एक त्रिज्या R तथा द्रव्यमान M का पहिया एक R ऊँचाई वाले दृढ़ सोपान (step) के तल पर रखा है (जैसे चित्र में

दिखाया गया है)। पहिये को सोपान पर चढ़ाने मात्र के लिए एक अचर बल पहिये के पृष्ठ पर सतत कार्यरत्त है। कागज के पृष्ठ से अभिलम्ब दिशा में (perpendicular to the plane of the paper) बिन्दु Q से जाने वाली अक्ष के सोपान बलआघूर्ण τ मानिये। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन है/हैं:



(A) If the force is applied normal to the circumference at point P then τ is zero

(B) If the force is applied tangentially at point S then $\tau \# 0$ but the wheel never climbs the step

(C) If the force is applied at point P tangentially then τ decreases continuously as the wheel climbs

(D) If the force is applied normal to the circumference at point X then τ is constant

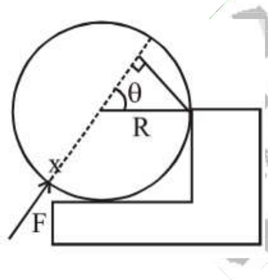
(A) यदि बिन्दु P पर पहिये की परिधि से अभिलम्ब दिशा में बल लगाया जाये तब τ शून्य रहेगा

(B) यदि बिन्दु S पर स्पर्शीय बल लगाया जाये तब $\tau \neq 0$ है किंतु पहिया सोपान पर कभी नहीं चढ़ेगा

(C) यदि बिन्दु P पर स्पर्शीय बल लगाया जाये तब जैसे पहिया सोपान पर चढ़ेगा वैसे τ सतत घटेगा

(D) यदि बिन्दु X पर पहिये की परिधि से अभिलम्ब दिशा में बल लगाया जाये, तब τ अचर रहेगा

Sol. (A) is incorrect

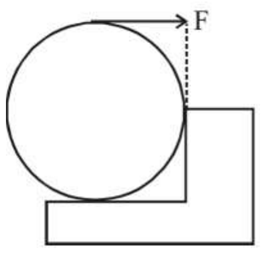


If force is applied normal to surface at point X

$\tau = F_y R \sin\theta$

Thus τ depends on θ and it is not constant

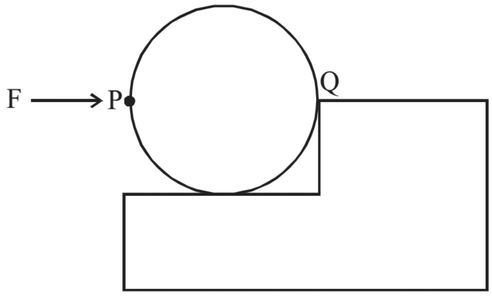
(B) is incorrect



if force applied tangentially at S

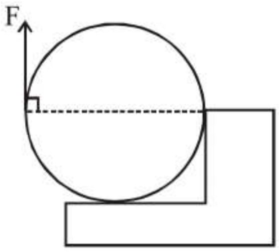
$\tau = F \times R \neq 0$

but it will climb as mentioned in question.



If force is applied normal to surface at P then line of action of force will pass from Q and thus $\tau = 0$

(D) is incorrect.

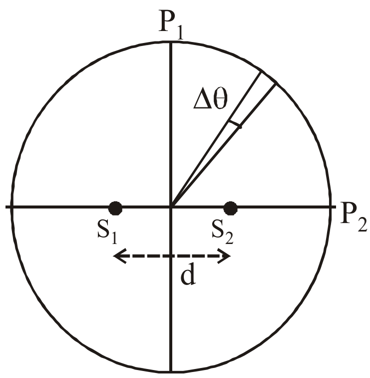


if force is applied at P tangentially the

$t = F \times 2R =$ constant

9. Two coherent monochromatic point sources S_1 and S_2 of wavelength $\lambda = 600$ nm are placed symmetrically on either side of the center of the circle as shown. The sources are separated by a distance $d = 1.8$ mm. This arrangement produces interference fringes visible as alternate bright and dark spots on the circumference of the circle. The angular separation between two consecutive bright spots is $\Delta\theta$. Which of the following options is/are correct?

दो कलासंबंध एकवर्णी (coherent monochromatic) बिन्दु स्त्रोत S_1 तथा S_2 जिनकी तरंगदैर्ध्य $\lambda = 600$ nm है एवं वृत्त के केन्द्र के दोनों ओर सममित अवस्था में स्थित है (जैसे चित्र में दिखाया गया है)। स्त्रोत S_1 तथा S_2 के मध्य की दूरी $d = 1.8$ mm है। इस व्यवस्था द्वारा व्यतिकिरण फ्रिन्जें (interference fringes) प्रतिवर्ती दीप्त एवं अदीप्त चित्तियों (spots) के रूप में एक वृत्त की परिधि पर दिखती है। $\Delta\theta$ दो क्रमागत दीप्त चित्तियों के मध्य कोणीय दूरी (angular spearation between two consecutive bright spots) है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/हैं:



(A) The angular separation between two consecutive bright spots decreases as we move from P_1 to P_2 along the first quadrant

(B) A dark spot will be formed at the point P_2

(C) The total number of fringes produced between P_1 and P_2 in the first quadrant is close to 3000

(D) At P_2 the order of the fringe will be maximum

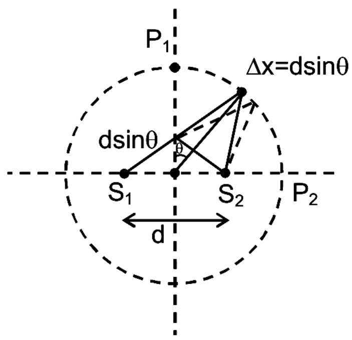
(A) प्रथम वृत्तपाद में P_1 से P_2 तक जाने में दो क्रमागत दीप्त चित्तियों के मध्य की कोणीय दूरी घटती है

(B) P_2 पर एक अदीप्त बिन्दु बनेगा

(C) P_1 तथा P_2 के मध्य के प्रथम वृत्तपाद (first quadrant) में कुल करीब 3000 फ्रिन्जें बनेगी

(D) P_2 पर फ्रिन्जों का क्रम उच्चतम होगा

Sol.



$\lambda = 600$ nm

at P_1 $\quad \Delta x = 0$

at P_2 $\quad \Delta x = 1.8$ mm $= n\lambda$

No. maximum will be $= n = \dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{1.8\text{mm}}{600\text{nm}} = 3000$

at P_2 $\quad \Delta x = 3000\lambda$

hence bright fringe will be formed.

at P_2 $\quad 3000^{th}$ maxima is formed.

for 'D' option

$\Delta x = d\sin\theta$

$d\Delta x = d\cos\theta.d\theta$

$R\lambda = d\cos\theta.Rd\theta$

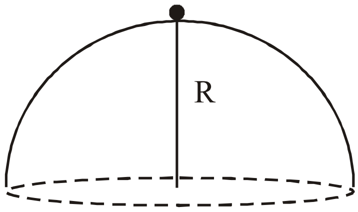
$$Rd\theta = \frac{R\lambda}{d\cos\theta}$$

as we move from P_1 to P_2

$\theta\uparrow \cos\theta\downarrow Rd\theta\uparrow$

10. A point charge +Q is placed just outside an imaginary hemispherical surface of radius R as shown in the figure. Which of the following statement is/are correct ?

धनात्मक बिन्दु आवेश +Q एक काल्पनिक अर्धगोलीय पृष्ठ जिसकी त्रिज्या R है, के बाहर रखा है (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं:



(A) The electric flux passing through the curved surface, of the hemisphere is $-\frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(B) The component of the electric field normal to the flat surface is constant-over the surface

(C) Total flux through the curved and the flat surfaces is $\frac{Q}{\varepsilon_0}$

(D) The circumference of the flat surface is an equipotential

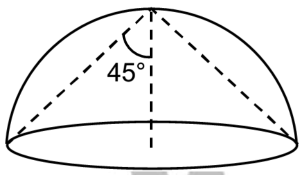
(A) अर्धगोलीय वक्रित पृष्ठ से गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स (electric flux) का मान $-\frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ है

(B) विद्युत क्षेत्र का समतल पृष्ठ से अभिलम्बित घटक सम्पूर्ण पृष्ठ पर अचर रहेगा

(C) वक्रित एवं समतल पृष्ठ से गुजरने वाला कुल फ्लक्स $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ है

(D) समतल पृष्ठ की परिधि एक समविभव पृष्ठ (equipotential surfac) है

Sol. **(C)**



ϕ total due to charge Q is $=\frac{Q}{\varepsilon_0}$

so ϕ through the curved and flat surface will be less than $\frac{Q}{\varepsilon_0}$

(B)

The component of the electric field perpendicular to the flat surface will decrease so we move away from the centre as the distance increases (magnitude of electric field decreases) as well as the angle between the normal and electric field will increase.

Hence the component of the electric field normal to the flat surface is not constant.

Aliter :

$$x = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{KQ}{x^2} = \frac{KQ\cos^2\theta}{R^2}$$

$E\perp = \dfrac{KQ\cos^3\theta}{R^2}$

As we move away from centre $\theta\uparrow \cos\theta\downarrow$ so $E\perp\downarrow$

(D)

Since the circumference is equidistant from 'Q' it will be equipotential $V = \dfrac{KQ}{\sqrt{2}R}$

(A)

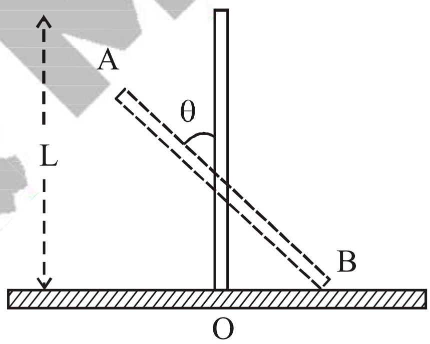
$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$; $\theta = 45^o$

$$\phi = -\frac{\Omega}{4\pi}\times\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi(1-\cos\theta)}{4\pi}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$= -\frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

11. A rigid uniform bar AB of length L is slipping from its vertical position on a frictionless floor (as shown in the figure). At some instant of time, the angle made by the bar with the vertical is θ. Which of the following statements about its motion is/are correct?

एक L लम्बाई का दृढ़ दंड (rigid bar) AB अपनी उर्ध्वाधर स्थिति से घर्षणहीन अनुभूमित तल (frictionless horizontal surface) पर चित्रानुसार फिसल रहा है। समय के किसी क्षण पर दंड द्वारा उर्ध्वाधर से बनाया कोण θ है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं:



(A) Instantaneous torque about the point in contact with the floor is proportional to $\sin\theta$

(B) The trajectory of the point A is a parabola

(C) The midpoint of the bar will fall vertically downward

(D) When the bar makes an angle θ with the vertical, the displacement of its midpoint from the initial position is proportional to $(1-\cos\theta)$

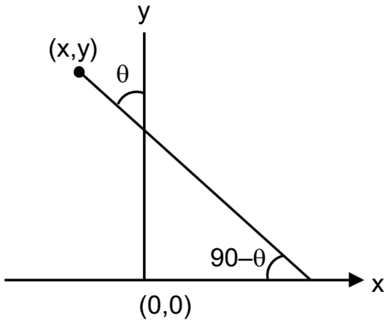
(A) दंड और भूतल के स्पर्श बिन्दु के चारों तरफ तात्क्षणिक बलयाघूर्ण (Instantaneous torque) $\sin\theta$ के समानुपाती है

(B) बिन्दु A का प्रपथ परवलयिक (parabolic path) है

(C) दंड का मध्य बिन्दु उर्ध्वाधर नीचे की ओर (vertically downward) गिरेगा

(D) जब दंड उर्ध्वाधर से θ कोण बनाता है तब दंड के मध्य बिन्दु का विस्थापन उसके आरम्भिक स्थिति से $(1-\cos\theta)$ के समानुपाती है

Sol.



$x = -\frac{l}{2}\sin\theta$

$y = l\cos\theta$

$\frac{y^2}{l^2} + \frac{4x^2}{l^2} = 1$

Path of A is ellipse

(B) torque about point of contact

$mg\frac{l}{2}\sin\theta = I\alpha$

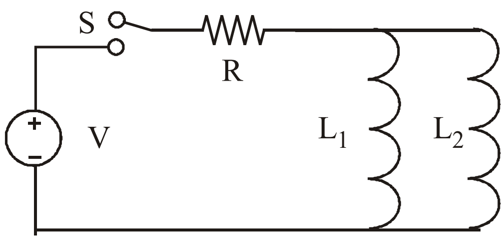
hence torque $\propto \sin\theta$

(D) $y_{cm} = \frac{L}{2}(1-\cos\theta)$

(C) midpoint will fall vertically downwards

12. A source of constant voltage V is connected to a resistance R and two ideal inductors L_1 and L_2 through a switch S as shown. There is no mutual inductance between the two inductors. The switch S is initially open. At t = 0, the switch is closed and current begins to flow. Which of the following options is/are correct?

दो आदर्श प्रेरक (ideal inductor) L_1 तथा L_2 और एक प्रतिरोध में (resistance) R को एक अचल वोल्टता V के स्त्रोत से एक स्विच S द्वारा जोड़ा जाता है (जैसा चित्र में दिखाया गया है)। L_1 तथा L_2 के मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व (mutual inductance) नहीं है। प्रारम्भ में स्विच S खुला है। समय t = 0 पर स्विच बंद किया जाता है और धारा बहनी प्रारम्भ होती है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं:



(A) After a long time, the current through L_1 will be $\frac{V}{R}\frac{L_2}{L_1+L_2}$

(B) After a long time, the current through L_2 will be $\frac{V}{R}\frac{L_1}{L_1+L_2}$

(C) The ratio of the currents through L_1 and L_2 is fixed at all times (t > 0)

(D) At t = 0, the current through the resistance R is $\frac{V}{R}$

(A) दीर्घकाल के बाद L_1 में प्रवाहित धारा $\frac{V}{R}\frac{L_2}{L_1+L_2}$ होगी

(B) दीर्घकाल के बाद L_2 में प्रवाहित धारा $\frac{V}{R}\frac{L_1}{L_1+L_2}$ होगी

(C) L_1 तथा L_2 में प्रवाहित धारा का अनुपात हर समय $(t > 0)$ नियत रहता है

(D) $t = 0$ पर प्रतिरोध R में प्रवाहित धारा $\frac{V}{R}$ है

Sol. (A) & (B) After long time current through $R = I = \frac{V}{R}$

and $LI_1 = L_2I_2$

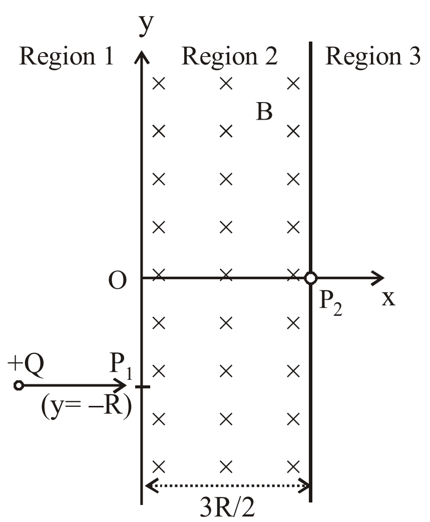
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{L_1}$$

$$I_1 = \frac{L_2 I}{L_1+L_2} \qquad I_2 = \frac{L_1 I}{L_1+L_2} = \left(\frac{L_1}{L_1+L_2}\right)\frac{V}{R}$$

(D) $t = 0$ $\qquad I = 0$

13. A uniform magnetic field B exists in the region between x = 0 and $x = \frac{3R}{2}$ (region 2 in the figure) pointing normally into the plane of the paper. A particle with charge +Q and momentum p directed along x-axis enters region 2 from region 1 at point P_1 $(y = -R)$. Which of the following option(s) is/are correct?

एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र (uniform magnetic field) B कागज के तल के अभिलम्ब दिशा में x = 0 तथा $x = \frac{3R}{2}$ के मध्य के क्षेत्र (चित्र में region 2) में सर्वत्र (जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है) उपस्थित है। एक कण जिसका आवेश +Q एवं संवेग p है, वह x-अक्ष के अनुदिश क्षेत्र 2 में बिन्दु P_1 $(y = -R)$ पर प्रवेश करता है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं:



(A) When the particle re-enters region 1 through the longest possible path in region 2, the magnitude of the change in its linear momentum between point P_1 and the farthest point from y-axis is $p/\sqrt{2}$

(B) For $B = \frac{8}{13}\frac{p}{QR}$, the particle will enter region 3 through the point P_2 on x-axis

(C) For $B > \frac{2}{3}\frac{p}{QR}$, the particle will re-enter region 1

(D) For a fixed B, particles of same charge Q and same velocity v, the distance between the point P_1 and the point of re-entry into region 1 is inversely proportional to the mass of the particle

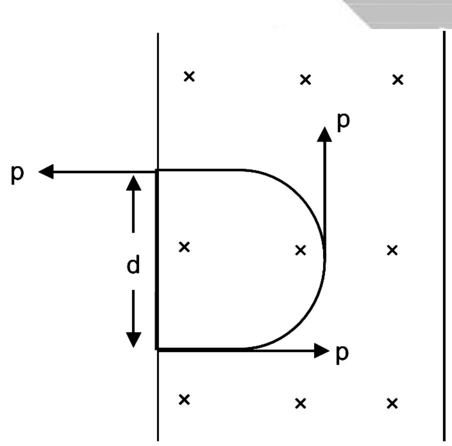
(A) जब कण सबसे लम्बे सम्भवपथ के क्षेत्र 2 (region 2) से क्षेत्र 1 (region 1) में पुनः प्रवेश करता है, तब बिन्दु P_1 तथा y-अक्ष से सबसे दूर बिन्दु के लिए रेखिक संवेग के परिमाण में बदलाव $p/\sqrt{2}$ है

(B) $B = \frac{8}{13}\frac{p}{QR}$ के लिए कण क्षेत्र 3 (region 3) में x-अक्ष पर बिन्दु P_2 से प्रवेश करेगा

(C) $B > \frac{2}{3}\frac{p}{QR}$ के लिए कण क्षेत्र, 1 (region 1) में पुनः प्रवेश करेगा

(D) एक नियत B के लिए समसमान आवेश Q एवं एक समान वेग v वाले कणों के लिए बिन्दु P_1 एवं क्षेत्र 1 (region 1) में पुनः प्रवेश बिन्दु की दूरी का अंतर कणों के द्रव्यमान के व्युत्क्रमानुपाती है

Sol. (A)

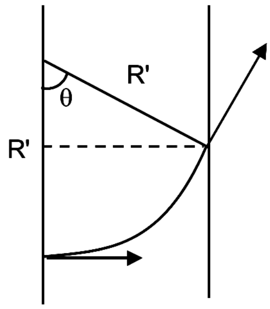


$$|\Delta \vec{p}| = \sqrt{2}p$$

(B) $R' = \frac{mv}{QB}$

$$d = 2R' = \frac{2mv}{QB}$$

$d \propto m$



(C) $R'(1-\cos\theta) = R$

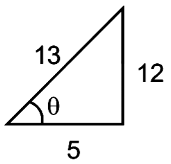
$$R'\sin\theta = \frac{3R}{2}$$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3}\times\frac{9}{5} = \frac{12}{5}$$



$$\sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$R'\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{3R}{2};\ R' = \frac{13R}{8} = \frac{P}{QB};\ B = \frac{8P}{13QR}$$

(D) $\dfrac{P}{QB} < \dfrac{3R}{2}$

$$B > \frac{2P}{3QR}$$

14. The instantaneous voltages at three terminals marked X, Y and Z are given by

तीन टर्मिनलों के बिन्दुओं X, Y तथा Z के लिए तात्क्षणिक वोल्टता (instantaneous voltage) दी गई है

$V_x = V_0 \sin\omega t,$

$V_y = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ and / और

$V_z = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$

An ideal voltmeter is configured to read rms value of the potential difference between its terminals. It is connected between points X and Y and then between Y and Z. The reading(s) of the voltmeter will be

एक आदर्श वोल्टमापी (ideal voltmeter) दो बिन्दुओं के विभवान्तर का आर एम एस (root mean square, V^{rms}) मान देता है। यह वोल्टमापी बिन्दु X तथा Y से जोड़ा जाता है फिर Y तथा Z से जोड़ा जाता है। इस वोल्टमापी का मापन होगा/होंगे:

(A) $V_{YZ}^{rms} = V_0\sqrt{\frac{1}{2}}$

(B) $V_{XY}^{rms} = V_0\sqrt{\frac{3}{2}}$

(C) independent of the choice of the two terminals / किसी भी दो बिन्दुओं के चयन पर निर्भर नहीं करता

(D) $V_{XY}^{rms} = V_0$

Sol. $V_{xy} = V_x - V_y = (V_{xy})_0 \sin(\omega t + \phi_1)$

$$(V_{xy})_0 = \sqrt{V_0^2 + V_0^2 - 2V_0^2\cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}V_0$$

$$(V_{xy})_{rms} = \frac{(V_{xy})_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}V_0$$

$$V_{yz} = V_y - V_z = (V_{yz})_0 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$(V_{yz})_0 = \sqrt{V_0^2 + V_0^2 - 2V_0^2\cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}V_0$$

$$(V_{yz})_{rms} = \frac{(V_{yz})_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}V_0$$

$$V_{xz} = V_x - V_z = (V_{xz})_0 \sin(\omega t + \phi_3)$$

$$(V_{xz})_0 = \sqrt{V_0^2 + V_0^2 - 2V_0^2\cos\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{3}V_0$$

$$(V_{xz})_{rms} = \frac{(V_{yz})_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}V_0$$

SECTION-III (Maximum Marks : 12)

PARAGRAPH 1

Consider a simple RC circuit as shown in Figure 1.

Process 1: In the circuit the switch S is closed at t = 0 and the capacitor is fully charged to voltage V_0 (i.e., charging continues for time T >> RC). In the process some dissipation (E_D) occurs across the resistance R. The amount of energy finally stored in the fully charged capacitor is E_C.

Process 2: In a different process the voltage is first set to $\frac{V_0}{3}$ and and maintained for a charging time T >> RC. Then the voltage is raised to $\frac{2V_0}{3}$ without discharging the capacitor and again maintained for a time T >> RC. The process is repeated one more time by raising the voltage to V_0 and the capacitor is charged to the same final voltage V_0 as in Process 1.

These two processes are depicted in Figure 2.

एक साधारण RC परिपथ को देखिये, जैसा चित्र 1 में दर्शाया गया है।

प्रक्रम 1: $t = 0$ पर स्विच S द्वारा परिपथ पूर्ण किया जाता है एवं संधारित्र पूर्ण रूप से वोल्टता V_0 से आवेशित हो जाता है ($T >> RC$ समय तक आवेषण चलता रहता है)। इस प्रक्रम में प्रतिरोध R के द्वारा कुछ विद्युत–ऊर्जा क्षय (Energy dissipated), E_D होती है। पूर्ण रूप से आवेशित संधारित्र में संचित ऊर्जा (stored energy in a charged capacitor) का मान E_C ह।

प्रक्रम 2: एक अलग प्रक्रम में पहले $\frac{V_0}{3}$ वोल्टता को आवेशित समय $T >> RC$ के लिए अनुरक्षित किया जाता है। तब बिना संधारित्र आवेश विसर्जन के समय को $T >> RC$ के लिए अनुरक्षित करके वोल्टता को $\frac{2V_0}{3}$ तक बढ़ाया जाता है। वोल्टता को V_0 तक बढ़ाने के लिए यह प्रक्रम एक और बार दोहराया जाता है। संधारित्र को अंतिम वोल्टता V_0 (जैसा कि प्रक्रम 1 में है) तक आवेशित किया जाता है।

ये दो प्रक्रम चित्र 2 में दिखाए गये हैं।

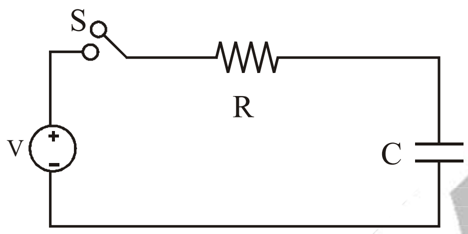


Figure 1

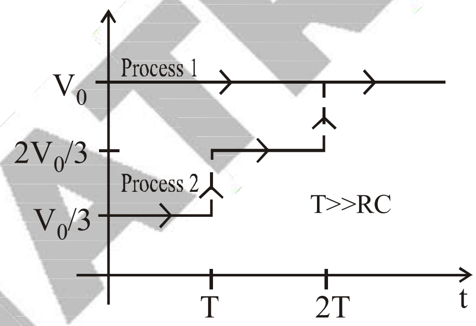


Figure 2

15. In Process 1, the energy stored in the capacitor E_C and heat dissipated across resistance E_D are related by:
प्रक्रम 1 में संधारित्र में संचित ऊर्जा E_C और प्रतिरोध R द्वारा ऊर्जा क्षय E_D में संबंध है:

(A) $E_C = E_D \ln 2$ (B) $E_C = E_D$ (C) $E_C = 2E_D$ (D) $E_C = \frac{1}{2}E_D$

Sol. $E_C = \frac{1}{2}CV_0^2$; $E_D = V_0CV_0 - \frac{1}{2}CV_0^2$

$= \frac{1}{2}CV_0^2$

$\therefore\ E_C = E_D$

16. In Process 2, total energy dissipated across the resistance E_D is:
प्रक्रम 2 के दौरान प्रतिरोध के द्वारा कुल क्षय ऊर्जा E_D है:

(A) $E_D = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right)$ (B) $E_D = 3\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right)$

(C) $E_D = 3\ CV_0^2$ (D) $E_D = \frac{1}{2}CV_0^2$

Sol. $E_{D_1} = \frac{V_0}{3}\left(\frac{CV_0}{3}\right) - \frac{1}{2}C.\left(\frac{V_0}{3}\right)^2 = \frac{CV_0^2}{9} - \frac{C_0^2}{18}$

$$=\frac{CV_0^2}{18}$$

$$E_{D_2}=\frac{2V_0}{3}\left[\frac{2CV_0}{3}-\frac{CV_0}{3}\right]-\left[\frac{1}{2}C\left(\frac{2V_0}{3}\right)^2-\frac{1}{2}C.\left(\frac{V_0}{3}\right)^2\right]$$

$$=\frac{2V_0}{3}\left[\frac{CV_0}{3}\right]-\frac{1}{2}C\left[\frac{4V_0^2}{9}-\frac{V_0^2}{9}\right]$$

$$=\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{2\times 9}\times 3\right)CV_0^2=\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{6}\right)CV_0^2=\left(\frac{12-9}{9\times 6}\right)CV_0^2$$

$$E_{D_2}=\frac{1}{18}CV_0^2$$

$$E_{D_3}=V_0\left[CV_0-\frac{2CV_0}{3}\right]-\left[\frac{1}{2}CV_0^2-\frac{1}{2}C\left(\frac{2V_0}{3}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}CV_0^2-\frac{1}{2}CV_0^2\left[1-\frac{4}{9}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{18}\right)CV_0^2=\left(\frac{6-5}{18}\right)CV_0^2=\left(\frac{1}{18}\right)CV_0^2$$

$$\text{Total}=\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\right)CV_0^2$$

$$=\frac{3}{18}CV_0^2$$

$$E_D=\frac{3}{9}\left[\frac{1}{2}CV_0^2\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right)$$

PARAGRAPH 2

One twirls a circular ring (of mass M and radius R) near the tip of one's finger as shown in Figure 1. In the process the finger never loses contact with the inner rim of the ring. The finger traces out the surface of a cone, shown by the dotted line. The radius of the path traced out by the point where the ring and the finger is in contact is r. The finger rotates with an angular velocity ω_0. The rotating ring rolls without slipping on the outside of a smaller circle described by the point where the ring and the finger is in contact (Figure 2). The coefficient of friction between the ring and the finger is μ and the acceleration due to gravity is g.

एक वृत्ताकार वलय (circular ring) (द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R) एक उंगली के परित घ्रुतघूर्णन करता है (जैसा चित्र 1 में दर्शाया गया है)। इस प्रक्रम में उंगली वलय के अंतरिक पृष्ठ से सदैव स्पर्श करती है। उंगली एक शंकु (cone) के पृष्ठ का अनुरेखिय पथ का अनुसरण करती है जैसे की बिन्दुकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है। उंगली एवं वलय के स्पर्श बिन्दु के अनुरेखिय पथ की त्रिज्या r है। उंगली कोणीय वेग ω_0 से घूर्णन कर रही है। वलय r त्रिज्या वाले वृत्त के बाहरी पृष्ठ पर फिसलन रहित घूर्णन (rolls without slipping) करता है। जैसा चित्र 2 में वलय एवं उंगली के स्पर्श बिन्दु द्वारा दर्शाया गया है। वलय एवं उंगली के मध्य घर्षण गुणांक (coefficient of friction) μ, एवं गुरूत्वीय

त्वरण g है।

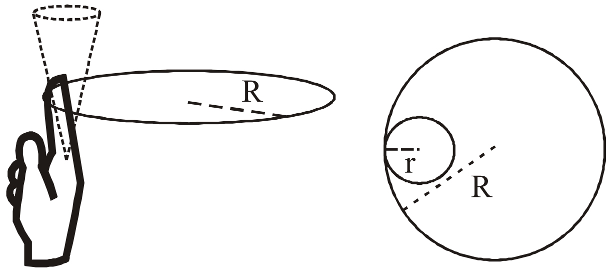


Figure 1 **Figure 2**

17. The total kinetic energy of the ring is :
वलय की कुल गतिज ऊर्जा है:

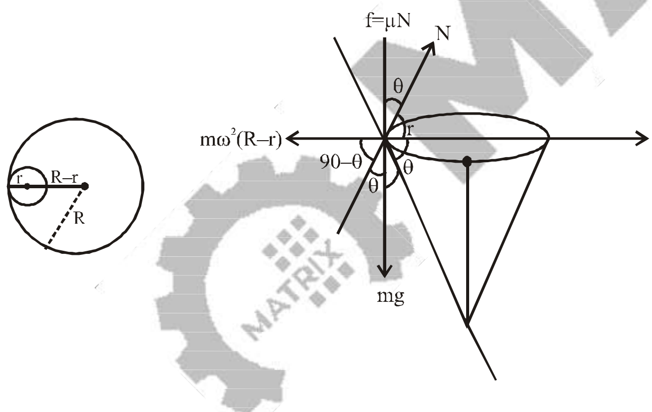
(A) $M\omega_0^2(R-r)^2$ (B) $\frac{1}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (C) $M\omega_0^2R^2$ (D) $\frac{3}{2}M\omega_0^2(R-r)$

Sol. **Bonus**

18. The minimum value of ω_0 below which the ring will drop down is :
न्यूनतम ω_0 जिसके कम होते ही वलय गिर जायेगा, वह है:

(A) $\sqrt{\frac{g}{2\mu(R-r)}}$ (B) $\sqrt{\frac{3g}{2\mu(R-r)}}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{\mu(R-r)}}$ (D) $\sqrt{\frac{2g}{\mu(R-r)}}$

Sol.



$N = mu^2 (R-r)\sin\theta + mg\cos\theta$
$f = \mu N = \mu mu^2(R-r)\sin\theta + \mu mg\cos\theta = mg\sin\theta$

$$u^2 = \frac{g\sin\theta - \mu g\cos\theta}{\mu(R-r)\sin\theta}$$

$$u^2 = \frac{g\sin\theta}{\mu(R-r)\sin\theta} \qquad \omega^2 = \frac{g}{\mu(R-r)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu(R-r)}}$$