



PART-III

SECTION-I (Maximum Marks : 28)

- * This section contains SEVEN Questions
 - * Each question has FOUR option [A], [B], [C] and [D]. ONE OR MORE THAN ONE of these four options is(are) correct.
 - * For each question, darken the bubble(s) corresponding to all the correct option(s) in the ORS
 - * For each question, marks will be awarded in one of the following categories.
 - * Full Marks : +4 If only the bubble(s) corresponding to all the correct option(s) is(are) darkened
 - * Partial Marks : +1 For darkening a bubble corresponding to each correct option, provided NO incorrect option is darkened
 - * Zero Marks : 0 If none of the bubbles is darkened
 - * Negative Marks : -2 In all other cases
- For example, if [A], [B], [C] and [D] are all the correct options for a question, darkening all these three will get +4 marks; darkening only [A] and [D] will get +2 marks; and darkening [A] and [B] will get -2 marks, as a wrong option is also darkened

37. Let X and Y be two events such that $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ and $P(Y|X) = \frac{2}{5}$. Then :

माना कि X तथा Y इस प्रकार की दो घटनायें (events) हैं, कि $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ तथा $P(Y|X) = \frac{2}{5}$ है तब:

(A) $P(X \cap Y) = \frac{1}{5}$ (B) $P(X' | Y) = \frac{1}{2}$ (C) $P(Y) = \frac{4}{15}$ (D) $P(X \cup Y) = \frac{2}{5}$

Sol. $\frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{1}{2}$ $\frac{P(Y \cap X)}{P(X)} = \frac{2}{5}$]

$\Rightarrow P(Y) = \frac{4}{15}$ $P(X \cap Y) = \frac{2}{15}$

$P(X'|Y) = \frac{P(X' \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y) - P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{1}{2}$

Ans. BC

38. Let a, b, x and y be real numbers such that $a - b = 1$ and $y \neq 0$. If the complex number $z = x + iy$ satisfies

$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{z + 1} \right) = y$, then which of the following is(are) possible value(s) of x?

माना कि a, b, x तथा y इस प्रकार की वास्तविक संख्यायें (real numbers) हैं, कि $a - b = 1$ तथा $y \neq 0$ हैं। यदि

सम्मिश्र संख्या (complex number) $z = x + iy$, $\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{z + 1} \right) = y$ को सन्तुष्ट करती है, तब निम्न में से कौनसा/से x

का/के संभावित मान है/हैं:



- (A) $1 + \sqrt{1+y^2}$ (B) $-1 + \sqrt{1-y^2}$ (C) $1 - \sqrt{1+y^2}$ (D) $-1 - \sqrt{1-y^2}$

Ans. BD

Sol. $\text{Im}\left(\frac{a(x+iy)+b}{x+iy+1}\right) = y$

$$\text{Im}\left(\frac{(ax+b)+iay}{(x+1)+iy}\right) = y$$

$$\frac{ay(x+1) - y(ax+b)}{(x+1)^2 + y^2} = y$$

$$a - b = (x+1)^2 + y^2$$

$$1 = (x+1)^2 + y^2$$

$$(x+1)^2 = 1 - y^2$$

$$(x+1) = \pm\sqrt{1-y^2}$$

$$x = -1 \pm\sqrt{1-y^2}$$

39. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ be a continuous function. Then, which of the following function(s) has(have) the value zero at some point in the interval $(0, 1)$?

माना कि $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ एक सतत फलन है। तब निम्न फलनों में से कौनसे फलन/फलनों का/के मान अन्तराल $(0, 1)$ के किसी बिन्दु पर शून्य होगा?

(A) $x^9 - f(x)$

(B) $f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t \, dt$

(C) $x - \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(t) \cos t \, dt$

(D) $e^x - \int_0^x f(t) \sin t \, dt$

Ans. AC

Sol. (A) $h(x) = x^9 - f(x)$

$$h(0) = -f(0) = \text{negative}$$

$$h(1) = 1 - f(1) = \text{positive}$$

by IMVT we can say that $h(x) = 0$ will have solution in $(0, 1)$

(B) $h(x) = f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t \, dt$

$$h(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

(C) $h(x) = x - \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(t) \sin t \, dt$

$$h(0) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t \, dt = -\pi$$

$$h(1) = 1 - \int_0^{\frac{\pi-1}{2}} f(t) \sin t \, dt = +\pi$$



$\Rightarrow h(x) = 0$ will have solution in $(0, 1)$ by IMVT

$$(D) h(x) = e^x - \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt$$

$$h'(x) = e^x - f(x) \sin x > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$h(0) = 1$$

$$h(1) = e - \int_0^1 f(t) \sin t \, dt = +ve$$

$$h(\pi x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

40. Let $[x]$ be the greatest integer less than or equal to x . Then, at which of the following point(s) the function $f(x) = x \cos(\pi + [x])$ is discontinuous?

माना कि x से छोटा या x के समान सबसे बड़ा पूर्णांक $[x]$ है। तब $f(x) = x \cos(\pi + [x])$, निम्न में से किन बिन्दु/बिन्दुओं पर असतत है?

- (A) $x = 2$ (B) $x = 1$ (C) $x = -1$ (D) $x = 0$

Ans. ABC*

Sol. $f(x) = \cos(\pi x + \pi[x])$

$$f(x) \begin{cases} \rightarrow x \cos \pi x & [x] = \text{even} \\ \rightarrow -\cos \pi x & [x] = \text{odd} \end{cases}$$

Now check at integer

$f(x)$ is continuous at $x = 0$

$f(x)$ is disc. at $x = 2, 1, -1$

41. If a chord, which is not a tangent, of the parabola $y^2 = 16x$ has the equation $2x + y = p$, and midpoint (h, k) , then which of the following is(are) possible value(s) of p, h and k ?

यदि परवलय $y^2 = 16x$ की एक जीवा जो स्पर्शरेखा नहीं है, का समीकरण $2x + y = p$ तथा मध्यबिन्दु (h, k) है, तो निम्न में से p, h तथा k के संभावित मान हैं/हैं?

- (A) $p = -2, h = 2, k = -4$ (B) $p = 2, h = 3, k = -4$
(C) $p = -1, h = 1, k = -3$ (D) $p = 5, h = 4, k = -3$

Ans. B

Sol. $T = S_1$

$$k^2 - 16h = ky - 8(x + h)$$

$$ky - 8x = k^2 - 8h$$

compare with $2x + y = p$

$$-\frac{8}{2} = \frac{k}{1} = \frac{k^2 - 8h}{p}$$

Check options.

42. Which of the following is(are) NOT the square of a 3×3 matrix with real entries?

निम्न में से कौनसा/कौनसे वास्तविक संख्याओं के 3×3 आव्यूह का वर्ग नहीं है/हैं?



$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ans. BD

Sol. $|A^2| = |A|^2$ will be +ve

Now check option

43. If $2x - y + 1 = 0$ is a tangent to the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$, then which of the following CANNOT be sides of a right angled triangle?

यदि $2x - y + 1 = 0$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ की स्पर्शरेखा है, तो निम्न में से कौनसी समकोणीय त्रिभुज की भुजायें नहीं हो सकती है/हैं?

(A) a, 4, 2 (B) a, 4, 1 (C) 2a, 8, 1 (D) 2a, 4, 1

Ans. ABC

Sol. For $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Condition of tangency for $y = mx + c$ is

$$c^2 = a^2m^2 - b^2$$

$$1 = a^2(4) - 16$$

$$4a^2 = 17$$

$$2a = \pm\sqrt{17}$$

(A) $a^2 \neq 4^2 + 2^2$ (B) $a^2 \neq 4^2 + 1^2$ (C) $(2a)^2 \neq 8^2 + 1^2$ (D) $(2a)^2 = 4^2 + 1^2$

SECTION-II (Maximum Marks : 15)

- This section contains **FIVE** questions.
- The answer to each question is a **SINGLE DIGIT INTEGER** ranging from 0 to 9, both inclusive
- For each question, darken the bubble corresponding to the correct integer in ORS
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories:

Full Marks : +3 If only the bubble corresponding to the correct answer is darkened

Zero Marks : 0 In all other cases

44. The sides of a right angled triangle are in arithmetic progression. If the triangle has area 24, then what is the length of its smallest side?

एक समकोणीय त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी में है। यदि इसका क्षेत्रफल 24 है, तब इसकी सबसे छोटी भुजा की लम्बाई क्या है?

Ans. 6

Sol. Sides will be $a - d, a, a + d$

$$(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2$$

$$d = +\frac{a}{4}$$

So, sides will be $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3a}{4} \times a = 24$$

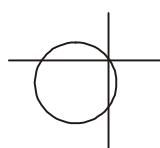
$$a^2 = (8) \Rightarrow a = 8$$

Sides will be 6, 8, 10

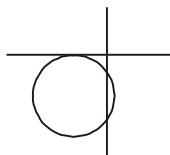
45. For how many values of p , the circle $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ and the coordinate axes have exactly three common points?

p के कितने मानों के लिये वृत्त $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ तथा निर्देशांक अक्षों के केवल तीन बिन्दु उभयनिष्ठ हैं?

Sol.

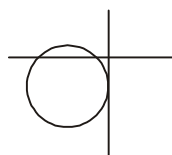


$p = 0$



not possible

2 values of p .



$p = -1$

Ans. 2

46. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable function such that $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ and $f'(0) = 1$.

If $g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} [f'(t) \operatorname{cosec} t - \cot t \operatorname{cosec} t f(t)] dt$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, then $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) =$

माना $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ इस प्रकार का अवकलनीय फलन (differentiable function) है, कि $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ तथा $f'(0) = 1$ है।

यदि $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ के लिये $g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} [f'(t) \operatorname{cosec} t - \cot t \operatorname{cosec} t f(t)] dt$ है, तब $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) =$

Ans. 2

Sol. $g(x) = [f(t) \operatorname{cosec} t]_0^{\pi/2}$
 $= f(\pi/2) - f(x) \operatorname{cosec} x$

$$g(x) = 3 - \frac{f(x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$$

$$= 3 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\cos x} \quad (\text{Use L.H. rule})$$

$$= 3 - 1 = 2$$

47. For a real number α , if the system



वास्तविक संख्या α के लिये, यदि रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

of linear equations, has infinitely many solutions, then $1 + \alpha + \alpha^2 =$
के अनन्त हल है, तब $1 + \alpha + \alpha^2 =$

Ans. 1

Sol. $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{or} \quad \alpha = -1$$

For $\alpha = 1$

System will have no solution

For $\alpha = -1$

System will have infinite solution

48. Words of length 10 are formed using the letters A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Let x be the number of such words where no letter is repeated; and let y be the number of such words where exactly one letter is repeated twice

and no other letter is repeated. Then, $\frac{y}{9x} =$

अक्षरों A, B, C, D, E, F, G, H, I, J से 10 लम्बाई के शब्द बनाये जाते हैं। माना कि x इस तरह के उन शब्दों की संख्या है, जिनमें किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं होती है, तथा y इस तरह के उन शब्दों की संख्या है, जिन में

केवल एक अक्षर की पुनरावृत्ति दो बार होती है व किसी अन्य अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं होती है। तब $\frac{y}{9x} =$

Ans. 5

Sol. $x = \underline{10}$

$$y = {}^{10}C_1 \cdot {}^9C_8 \cdot \frac{\underline{10}}{\underline{2}} = 45 \underline{10}$$

$$\frac{y}{9x} = 5$$

SECTION-III (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** questions of matching type.
- This section contains **TWO** tables (each having 3 column and 4 rows).
- Based on each table, there are **THREE** questions
- Each question has FOUR options [A], [B], [C] and [D]. **ONLY ONE** of these four options is correct.
- For each question, darken the bubble corresponding to the correct option in the ORS.
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories:

Full Marks : +3 If only the bubble corresponding to the correct answer is darkened

Zero Marks : 0 If none of the bubbles is darkened

Negative Marks : -1 In all other cases

ANSWER Q.49 to 51 by appropriately matching the information given in the three columns of the following table.

नीचे दी गयी टेबल के तीन कॉलमों में उपलब्ध सूचना का उपयुक्त ढंग से सुमेल कर प्रश्नों 49 से 51 के उत्तर दीजिये।

Columns 1, 2 and 3 contain conics, equations of tangents to the conics and points of contact, respectively.

कॉलम 1, 2 तथा 3 में क्रमशः कॉनिक (conics), कॉनिक पर स्पर्शरेखा (tangents) का समीकरण तथा स्पर्शबिन्दु दिये गये हैं।

Column-1	Column-2	Column-3
(I) $x^2 + y^2 = a^2$	(i) $my = m^2x + a$	(P) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
(II) $x^2 + a^2y^2 = a^2$	(ii) $y = mx + a\sqrt{m^2 + 1}$	(Q) $\left(\frac{-ma}{\sqrt{m^2 + 1}}, \frac{a}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)$
(III) $y^2 = 4ax$	(iii) $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - 1}$	(R) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2m^2 + 1}}\right)$
(IV) $x^2 - a^2y^2 = a^2$	(iv) $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + 1}$	(S) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - 1}}, \frac{-1}{\sqrt{a^2m^2 - 1}}\right)$

49. The tangent to a suitable conic (Column 1) at $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ is formed to be $\sqrt{3}x + 2y = 4$, then which of the following options is the only CORRECT combination?

यदि उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) के बिन्दु $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ पर स्पर्शरेखा $\sqrt{3}x + 2y = 4$ है, तब निम्न में से कौनसा विकल्प केवल सही संयोजन है?

- (A) (II) (iv) (R) (B) (IV) (iii) (S) (C) (II) (iii) (R) (D) (IV) (iv) (S)

Ans. A

50. For $a = \sqrt{2}$, if a tangent is drawn to suitable conic (Column 1) at the point of contact $(-1, 1)$, then which of the following options is the only CORRECT combination for obtaining its equation?

$a = \sqrt{2}$ के लिये उपयुक्त कॉनिक (Column 1) पर एक स्पर्शरेखा खींची जाती है, जिसका स्पर्शबिन्दु $(-1, 1)$ है, तब निम्न में से कौनसा विकल्प इस स्पर्शरेखा का समीकरण प्राप्त करने का केवल सही संयोजन है?

- (A) (I) (i) (P) (B) (III) (i) (P) (C) (II) (ii) (Q) (D) (I) (ii) (Q)

Ans. D

51. If a tangent to a suitable conic (Column 1) is found to be $y = x + 8$ and its point of contact is $(8, 16)$, then which of the following options is the only CORRECT combination?

यदि उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) के स्पर्शबिन्दु $(8, 16)$ पर स्पर्शरेखा $y = x + 8$ है, तब निम्न में से कौनसा विकल्प केवल सही संयोजन है?

- (A) (III) (i) (P) (B) (I) (ii) (Q) (C) (II) (iv) (R) (D) (III) (ii) (Q)



Ans. A

Sol. 49-51

Correct combination will be :

$$I \rightarrow (ii) \rightarrow Q$$

$$II \rightarrow (iv) \rightarrow R$$

$$III \rightarrow (i) \rightarrow P$$

$$IV \rightarrow (iii) \rightarrow S$$

49. For II $3 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow a^2 = 4$

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

$$xx_1 + yy_1 = 4$$

$$II \rightarrow (iv) \rightarrow R$$

$$\sqrt{3}x + 2y = 4$$

50. $(-1, 1)$ will satisfy curve I for $a = \sqrt{2}$ $I \rightarrow (ii) \rightarrow Q$

51. $m = 1, C = 8$

for $y^2 = 4ax \Rightarrow (8, 16)$ will satisfying for $a = 8$

$$4 - mx + \frac{8}{m}$$

$$y = x + 8$$

$$III \rightarrow (i) \rightarrow P$$

ANSWER Q.52 to 54 by appropriately matching the information given in the three columns of the following table.

नीचे दी गयी टेबल के तीन कॉलमों में उपलब्ध सूचना का उपयुक्त ढंग से सुमेल कर प्रश्नों 52 से 54 के उत्तर दीजिये।

Let $f(x) = x + \log_e x - x \log_e x, x \in (0, \infty)$

- Column 1 contains information about zeros of $f(x), f'(x)$ and $f''(x)$.
- Column 2 contains information about the limiting behavior of $f(x), f'(x)$ and $f''(x)$ at infinity.
- Column 3 contains information about the increasing/decreasing nature of $f(x), f'(x)$

Column-1	Column-2	Column-3
(I) $f(x) = 0$ for some $x \in (1, e^2)$	(i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	(P) f is increasing in $(0, 1)$
(II) $f'(x) = 0$ for some $x \in (1, e)$	(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$	(Q) f is decreasing in (e, e^2)
(III) $f'(x) = 0$ for some $x \in (0, 1)$	(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$	(R) f' is increasing in $(0, 1)$
(IV) $f''(x) = 0$ for some $x \in (1, e)$	(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$	(S) f' is decreasing in (e, e^2)

52. Which of the following options is the only CORRECT combination ?

- (A) (II) (ii) (Q) (B) (III) (iii) (R) (C) (IV) (iv) (S) (D) (I) (i) (P)

Ans. A



53. Which of the following options is the only CORRECT combination?
 (A) (III) (iv) (P) (B) (II) (iii) (S) (C) (I) (ii) (R) (D) (IV) (i) (S)

Ans. B

54. Which of the following option is the only INCORRECT combination?
 (A) (I) (iii) (P) (B) (II) (iii) (P) (C) (III) (i) (R) (D) (II) (iv) (Q)

Ans. C

माना कि $f(x) = x + \log_e x - x \log_e x$, $x \in (0, \infty)$ है।

- कॉलम 1 में $f(x)$, $f'(x)$ तथा $f''(x)$ के शून्यों की सूचना दी गयी है।
- कॉलम 2 में $f(x)$, $f'(x)$ तथा $f''(x)$ के अनन्त की तरफ सीमा पर व्यवहार की सूचना दी गयी है।
- कॉलम 3 में $f(x)$ तथा $f'(x)$ के वर्धमान/ह्रासमान होने की प्रकृति की सूचना दी गयी है।

स्तम्भ-1	स्तम्भ-2	स्तम्भ-3
(I) $f(x) = 0$ किस $x \in (1, e^2)$ के लिये	(i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	(P) f में $(0, 1)$ वर्धमान है
(II) $f'(x) = 0$ किस $x \in (1, e)$ के लिये	(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$	(Q) f में (e, e^2) ह्रासमान है
(III) $f'(x) = 0$ किस $x \in (0, 1)$ के लिये	(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$	(R) f' में $(0, 1)$ वर्धमान है
(IV) $f''(x) = 0$ किस $x \in (1, e)$ के लिये	(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$	(S) f' में (e, e^2) ह्रासमान है

52. निम्न में से कौनसा विकल्प केवल सही संयोजन है?
 (A) (II) (ii) (Q) (B) (III) (iii) (R) (C) (IV) (iv) (S) (D) (I) (i) (P)
53. निम्न में से कौनसा विकल्प केवल सही संयोजन है?
 (A) (III) (iv) (P) (B) (II) (iii) (S) (C) (I) (ii) (R) (D) (IV) (i) (S)
54. निम्न में से कौनसा विकल्प केवल गलत संयोजन है?
 (A) (I) (iii) (P) (B) (II) (iii) (P) (C) (III) (i) (R) (D) (II) (iv) (Q)

Sol. 52-54

$$f(x) = x + \ln x - x \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1 - x \ln x}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{(1+x)}{x^2} < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ is } \downarrow \forall x \in (0, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$$

$$f(x) = 1$$

$$f(e) = \frac{1-e}{e} < 0$$

$$f(x) < 0 \forall x > e$$

$$f(1) = 1 \quad f(e^2) = e^2 + 2 - 2e^2 = 2 - e^2 < 0$$

For column I (I) & (II) are true

For column II (ii), (iii) and (iv) are true

For column III P, Q, S are true



Matrix
JEE Academy

CODE-2

MATHS