

PART I : PHYSICS
SECTION-I (Maximum Marks : 18)

1. The electrostatic energy of Z protons uniformly distributed throughout a spherical nucleus of radius R is given by

$$E = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

The measured masses of the neutron, ${}^1_1\text{H}$, ${}^{15}_7\text{N}$ and ${}^{15}_8\text{O}$ are 1.008665 u, 1.007825 u, 15.000109 u and 15.003065 u, respectively. Given that the radii of both the ${}^{15}_7\text{N}$ and ${}^{15}_8\text{O}$ nuclei are same, $1\text{u} = 931.5\text{ MeV}/c^2$ (c is the speed of light) and $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1.44\text{ MeV fm}$. Assuming that the difference between the binding energies of ${}^{15}_7\text{N}$ and ${}^{15}_8\text{O}$ is purely due to the electrostatic energy, the radius of either of the nuclei is - ($1\text{ fm} = 10^{-15}\text{ m}$)
त्रिज्या R वाले एक गोलाकार नाभिक (nucleus) में Z प्रोटोन समानरूप से वितरित है। ऐसे नाभिक की स्थिर विद्युत ऊर्जा नीचे समीकरण में दी गई है -

$$E = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

न्यूट्रॉन, ${}^1_1\text{H}$, ${}^{15}_7\text{N}$ एवं ${}^{15}_8\text{O}$ नाभिकों (nuclei) के मापे गये द्रव्यमान क्रमशः 1.008665 u, 1.007825 u, 15.000109 u एवं 15.003065 u है। ${}^{15}_7\text{N}$ और ${}^{15}_8\text{O}$ नाभिकों की त्रिज्याएँ समान दी गई है। $1\text{u} = 931.5\text{ MeV}/c^2$ (जहाँ पर c प्रकाश की गति है) और $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1.44\text{ MeV fm}$ । यदि ${}^{15}_7\text{N}$ एवं ${}^{15}_8\text{O}$ की बंधक ऊर्जाओं का अंतर सिर्फ स्थिर विद्युत ऊर्जा के कारण है, तो दोनों में से किसी भी नाभिक की त्रिज्या क्या होगी? ($1\text{ fm} = 10^{-15}\text{ m}$)

- (A) 2.85 fm (B) 3.03 fm (C) 3.42 fm (D) 3.80 fm

Ans. C

Sol. Electrostatic energy = $BE_N - BE_O$
 $= [7M_H + 8M_n - M_N] - [8M_H + 7M_n - M_O] \times C^2$
 $= [-M_H + M_n + M_O - M_N]C^2$
 $= [-1.007825 + 1.008665 + 15.003065 - 15.00019] \times 931.5$
 $= +3.5359\text{ MeV}$

$$\Delta E = \frac{3}{5} \times \frac{1.44 \times 8 \times 7}{R} - \frac{3}{5} \times \frac{1.44 \times 7 \times 6}{R} = 3.5359$$

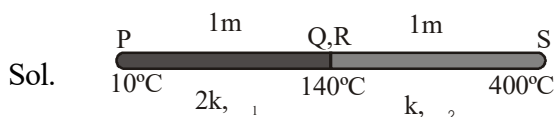
$$R = \frac{3 \times 1.44 \times 14}{5 \times 3.5359} = 3.42\text{ fm}$$

2. The ends Q and R of two thin wires, PQ and RS, are soldered (joined) together. Initially each of the wires has a length of 1m at 10°C . Now the end P is maintained at 10°C , while the end S is heated and maintained at 400°C . The system is thermally insulated from its surroundings. If the thermal conductivity of wire PQ is twice that of the wire RS and the coefficient of linear thermal expansion of PQ is $1.2 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$, the change in length of the wire PQ is -

एक पतले तार PQ के छोर Q को अन्य पतले तार RS के छोर R पर टांका लगाकर (soldered) जोड़ा गया है। 10°C पर दोनों तारों की लम्बाई 1m है। अब इस निकाय के छोर P तथा छोर S को क्रमशः 10°C तथा 400°C पर स्थिर रखा जाता है। यह निकाय चारों ओर से ऊष्मारोधी है। यदि तार PQ की ऊष्मा चालकता तार RS की ऊष्मा चालकता से दुगुनी है तथा तार PQ का रेखीय ऊष्मीय वृद्धि गुणांक $1.2 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$ है, तब तार PQ की लम्बाई में परिवर्तन का मान है -

- (A) 0.78 mm (B) 0.90 mm (C) 1.56 mm (D) 2.34 mm

Ans. A



$$dl = dx\alpha_1(\theta - 10)$$

$$\Delta l = \int dl \quad \therefore \left(\frac{\theta - 10}{x} \right) = \frac{130}{1} \quad \Rightarrow \theta = 10 + 130x$$

$$\Delta l = \int_0^1 (130x)\alpha_1 dx \quad \Delta l = 130\alpha_1 \frac{x^2}{2}$$

$$\Delta l = 130 \times 1.2 \times 10^{-5} \times \frac{1}{2} = 78 \times 10^{-5} = 0.78 \text{mm}$$

3. An accident in a nuclear laboratory resulted in deposition of a certain amount of radioactive material of half-life 18 days inside the laboratory. Tests revealed that the radiation was 64 times more than the permissible level required for safe operation of the laboratory. What is the minimum number of days after which the laboratory can be considered safe for use?

एक नाभिकीय प्रयोगशाला में दुर्घटना की वजह से रेडियोएक्टिव पदार्थ की कुछ मात्रा जमा हो गयी, जिसकी अर्धायु 18 दिनों की है। परीक्षण से पता चला कि प्रयोगशाला में विकिरण का स्तर सुरक्षित स्तर से 64 गुणा ज्यादा था। न्यूनतम कितने दिनों के बाद प्रयोगशाला काम करने के लिए सुरक्षित होगी –

- (A) 64 (B) 90 (C) 108 (D) 120

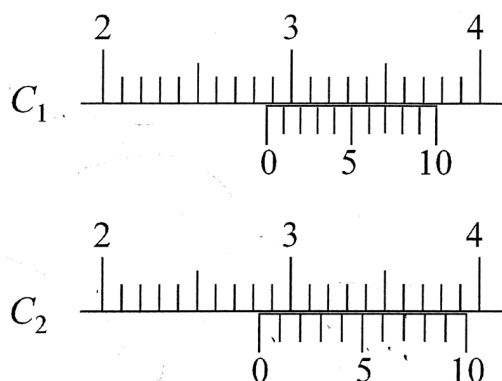
Ans. C

Sol. $A = A_0 2^{-2t/T_H}$

$$\Rightarrow \frac{A_0}{64} = A_0 2^{-2t/T_H} \quad \Rightarrow 6 = \frac{t}{T_H} \quad \Rightarrow t = 6T_H = 108 \text{days}$$

4. There are two Vernier calipers both of which have 1 cm divided into 10 equal divisions on the main scale. The Vernier scale of one of the calipers (C_1) has 10 equal divisions that correspond to 9 main scale divisions. The Vernier scale of the other caliper (C_2) has 10 equal divisions that correspond to 11 main scale divisions. The readings of the two calipers are shown in the figure. The measured values (in cm) by calipers C_1 and C_2 , respectively, are

दो वर्नियर कैलिपर्स इस तरह से हैं कि उनके मुख्य पैमाने का 1 cm, 10 समभागों में विभाजित है। एक कैलिपर (C_1) के वर्नियर पैमाने पर 10 बराबर भाग हैं जो कि मुख्य पैमाने के 9 भागों के बराबर हैं। दूसरे कैलिपर (C_2) के वर्नियर पैमाने पर भी 10 बराबर भाग हैं जो कि मुख्य पैमाने के 11 भागों के बराबर हैं। दोनों कैलिपर्स के पठनों को चित्र में दर्शाया गया है। C_1 तथा C_2 द्वारा मापे गए सही मान (cm में) क्रमशः हैं –



- (A) 2.87 and 2.86 (B) 2.87 and 2.87 (C) 2.87 and 2.83 (D) 2.85 and 2.82

Ans. C

Sol. For vernier C_1
 $10 \text{ VSD} = 9 \text{ MSD} = 9 \text{ mm}$
 $1 \text{ VSD} = 0.9 \text{ mm}$

$$\Rightarrow \text{LC} = 1 \text{ MSD} - 1 \text{ VSD} = 1 \text{ mm} - 0.9 \text{ mm} = 0.1 \text{ mm}$$

$$\text{Reading of } C_1 = \text{MSR} + (\text{VSR})(\text{L.C.}) = 28 \text{ mm} + (7)(0.1)$$

$$\text{Reading of } C_1 = 28.7 \text{ mm} = 2.87 \text{ cm}$$

For vernier C_2 : the vernier C_2 is abnormal,

So we have to find the reading from basics.

The point where both of the marks are matching :

distance measured from main scale = distance measured from vernier scale

$$28 \text{ mm} + (1 \text{ mm})(8) = (28 \text{ mm} + x) + (1.1 \text{ mm})(7)$$

$$\text{solving } x = 0.3 \text{ mm}$$

$$\text{So reading of } C_2 = 28 \text{ mm} + 0.3 \text{ mm} = 2.83 \text{ cm}$$

5. A gas is enclosed in a cylinder with a movable frictionless piston. Its initial thermodynamic state at pressure $P_i = 10^5 \text{ Pa}$ and volume $V_i = 10^{-3} \text{ m}^3$ changes to a final state at $P_f = (1/32) \times 10^5 \text{ Pa}$ and $V_f = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ in an adiabatic quasi-static process, such that $P^3 V^5 = \text{constant}$. Consider another thermodynamic process that brings the system from the same initial state to the same final state in two steps : an isobaric expansion at P_i followed by an isochoric (isovolumetric) process at volume V_f . The amount of heat supplied to the system in the two-step process is approximately

एक खोखले बेलन, जिसमें एक घर्षण रहित चलायमान पिस्टन लगा है, में एक गैस बंद है। निकाय की प्रारम्भिक ऊष्मागतिकी अवस्था (thermodynamic state) में गैस का दबाव $P_i = 10^5 \text{ Pa}$ तथा आयतन $V_i = 10^{-3} \text{ m}^3$ है। एक रूद्धोष्म स्थैतिककल्प (adiabatic quasi-static) की प्रक्रिया, जिसमें $P^3 V^5 = \text{स्थिरांक}$ है, से निकाय अंतिम ऊष्मागतिकी अवस्था $P_f = (1/32) \times 10^5 \text{ Pa}$ तथा $V_f = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ में परिवर्तित हो जाता है। एक दूसरी ऊष्मागतिकी प्रक्रिया में वही प्रारम्भिक एवं अंतिम अवस्थाएँ दो चरणों में पूर्ण की जाती हैं : पहले चरण में P_i पर समान दबाव वृद्धि के बाद दुसरे चरण में एक समान आयतन प्रक्रिया V_f आयतन पर होती है। दो चरणों वाली प्रक्रिया में निकाय को दी गई ऊष्मा की मात्रा लगभग है –

- (A) 112 J (B) 294 J (C) 588 J (D) 813 J

Ans. C

Sol. $\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow \text{monoatomic gas}$

From first law of thermodynamics

$$H = W + \Delta U$$

$$W = P_f \Delta V$$

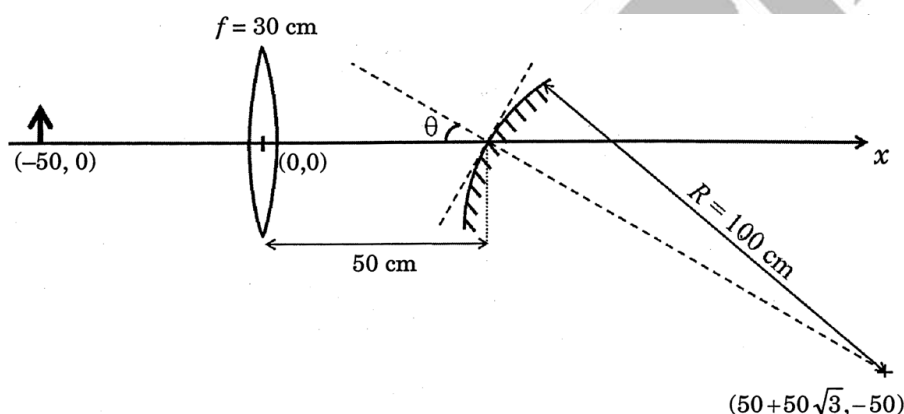
$$= 700 \text{ J}$$

$$\Delta U = nC_v \Delta T$$

$$= \frac{3}{2} [P_f V_f - P_i V_i] = -\frac{900}{8} \text{ J}$$

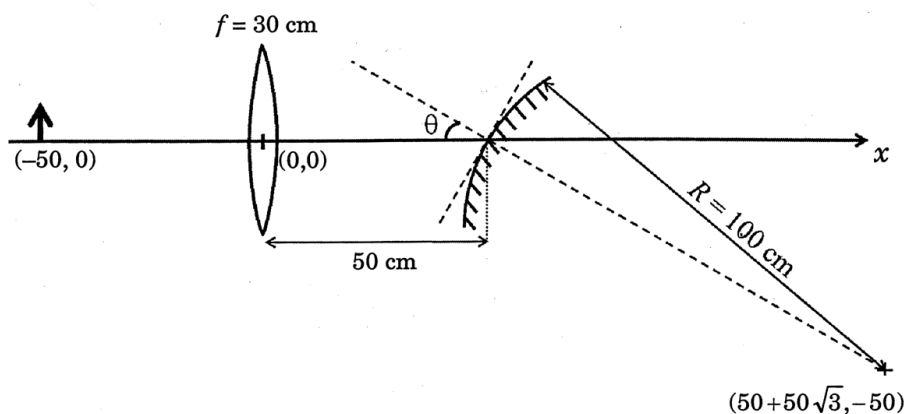
$$\text{So, } H = W + \Delta U = 588 \text{ J}$$

6. A small object is placed 50 cm to the left of a thin convex lens of focal length 30 cm. A convex spherical mirror of radius of curvature 100 cm is placed to the right of the lens at a distance of 50 cm. The mirror is tilted such that the axis of the mirror is at an angle $\theta = 30^\circ$ to the axis of the lens, as shown in the figure.



If the origin of the coordinate system is taken to be at the centre of the lens, the coordinates (in cm) of the point (x, y) at which the image is formed are -

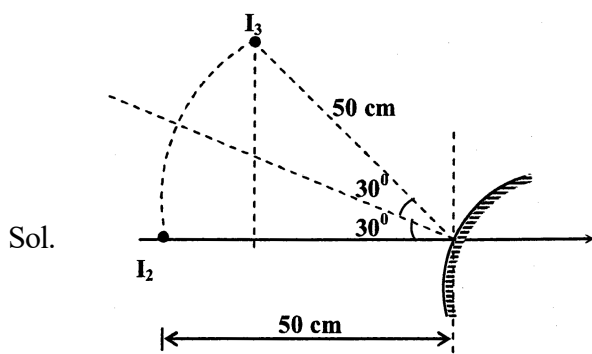
एक छोटी वस्तु को 30cm फोकस दूरी (focal length) वाले एक पतले उत्तल (convex) लेंस की बाईं ओर 50 cm की दूरी पर रखा गया है। 100 cm की वक्रता त्रिज्या वाले एक उत्तल गोलाकार दर्पण को लेंस की दाईं ओर 50 cm की दूरी पर रखा गया है। दर्पण को इस तरह से झुकाया गया है कि दर्पण का अक्ष लेंस के अक्ष से $\theta = 30^\circ$ का कोण बनाता है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है।



यदि निर्देशांक पद्धति का मूल बिन्दु लेंस के मध्य में हो तो जहाँ प्रतिबिंब बना है उस बिन्दु का निर्देशांक (x, y) सेंटीमीटर में, क्या होगा?

- (A) $(25, 25\sqrt{3})$ (B) $(125/3, 25/\sqrt{3})$ (C) $(50 - 25\sqrt{3}, 25)$ (D) $(0, 0)$

Ans. None



First Image I_1 from the lens will be formed at 75cm to the right of the lens.

Taking the mirror to be straight, the image I_2 after reflection will be formed at 50 cm to the left of the mirror.

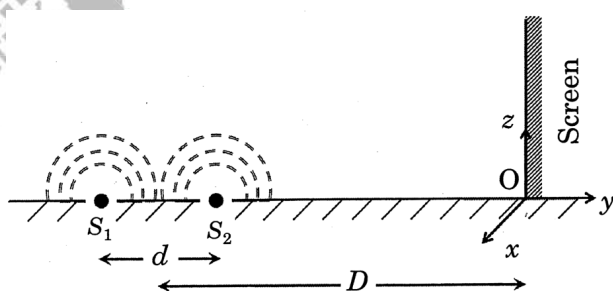
On rotation of mirror by 30° the final image is I_3 .

$$\text{So } x = 50 - 50\cos 60^\circ = 25\text{cm}$$

$$\text{and } y = 50\sin 60^\circ = 25\sqrt{3}\text{cm}$$

SECTION-II (Maximum Marks : 32)

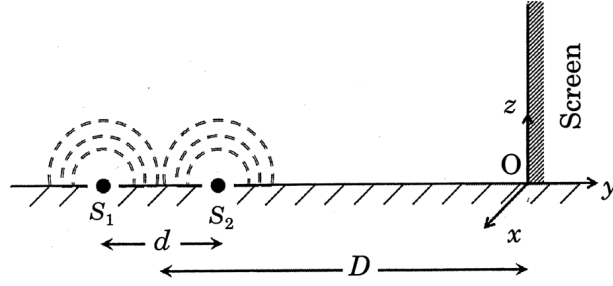
7. While conducting the Young's double slit experiment, a student replaced the two slits with a large opaque plate in the x-y plane containing two small holes that act as two coherent point sources (S_1, S_2) emitting light of wavelength 600 nm. The student mistakenly placed the screen parallel to the x-z plane (for $z > 0$) at a distance $D = 3\text{m}$ from the mid-point of S_1S_2 , as shown schematically in the figure. The distance between the sources $d = 0.6003\text{ mm}$. The origin O is at the intersection of the screen and the line joining S_1S_2 . Which of the following is(are) true of the intensity pattern on the screen?



- (A) Hyperbolic bright and dark bands with foci symmetrically placed about O in the x-direction
 (B) Semi circular bright and dark bands centered at point O
 (C) The region very close to the point O will be dark
 (D) Straight bright and dark bands parallel to the x-axis

एक विद्यार्थी ने यंग दो स्लिट वाले प्रयोग (Young's double slit experiment) करते समय दो स्लिटों की जगह एक बड़ी समतल अपारदर्शी पट्टी को x-y तल पर रख दिया। इस पट्टी में दो छोटे छिद्र हैं जो 600 nm तरंगदैर्घ्य प्रकाश उत्पन्न करने वाले दो कलासंबद्ध बिन्दु स्रोतों (S_1, S_2) के समान हैं। विद्यार्थी ने गलती से पर्दे (screen) को x-z तल ($z > 0$) के समानान्तर S_1S_2 के मध्य बिन्दु से $D = 3\text{m}$ की दूरी पर रख दिया, जैसा कि व्यवस्था-चित्र में दिखाया गया है। स्रोतों के बीच की दूरी $d = 0.6003\text{ mm}$ है। S_1S_2 को जोड़ने वाली रेखा जहाँ पर्दे से मिलती है वहाँ पर मूलबिन्दु O है। पर्दे पर तीव्रता प्रतिरूप (intensity

pattern) के लिए निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?



- (A) x-दिशा में बिन्दु O के गिर्द सममित फोकसों के साथ अतिपरवलयिक (Hyperbolic) दीप्त तथा अदीप्त पट्टियाँ
 (B) बिन्दु O पर केन्द्रित अर्धवृत्तीय दीप्त तथा अदीप्त पट्टियाँ
 (C) बिन्दु O का निकटतम क्षेत्र अदीप्त होगा
 (D) x-अक्ष के समानान्तर दीप्त तथा अदीप्त सीधी पट्टियाँ

Ans. BC

Sol. from theory fringes will be semi circular

and $\frac{d}{\lambda} = 1000 + \frac{1}{2}$

at 0 $\Delta x = 1000\lambda + \frac{\lambda}{2}$

so at 0 it will be dark

8. In an experiment to determine the acceleration due to gravity g , the formula used for the time period of a

periodic motion is $T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$. The values of R and r are measured to be (60 ± 1) mm and (10 ± 1)

mm, respectively. In five successive measurements, the time period is found to be 0.52s, 0.56s, 0.57s, 0.54s, 0.54s and 0.59s. The least count of the watch used for the measurement of time period is 0.01s. Which of the following statement(s) is(are) true?

- (A) The error in the measurement of r is 10% (B) The error in the measurement of T is 3.57%
 (C) The error in the measurement of T is 2% (D) The error in the determined value of g is 11%

गुरुत्वीय त्वरण g के निर्धारण के एक प्रयोग में प्रयुक्त आवर्ती-गति का समयकाल का सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$ है। R तथा

r का मापा गया मान क्रमशः (60 ± 1) mm तथा (10 ± 1) mm है। लगातार पाँच मापन में मापा गया समयकाल 0.52s, 0.56s, 0.57s, 0.54s, 0.54s तथा 0.59s है। समयकाल के मापन के लिए प्रयोग में लायी गयी घड़ी का अल्पत्मांक 0.01s है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A) r के मापन में त्रुटि 10% है। (B) T के मापन में त्रुटि 3.57% है।
 (C) T के मापन में त्रुटि 2% है। (D) g के निकाले गये मान में त्रुटि 11% है।

Ans. ABD

Sol. Error in T

$$T_{\text{mean}} = \frac{0.52 + 0.56 + 0.57 + 0.54 + 0.59}{5} = 0.556 \approx 0.56s$$

$$\Delta T_{\text{mean}} = 0.02$$

$$\therefore \text{error in } T \text{ is given by } \frac{0.02}{0.56} \times 100 = 3.57\%$$

$$\text{Error in } r = \frac{1}{10} \times 100 = 10\%$$

Error in g

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

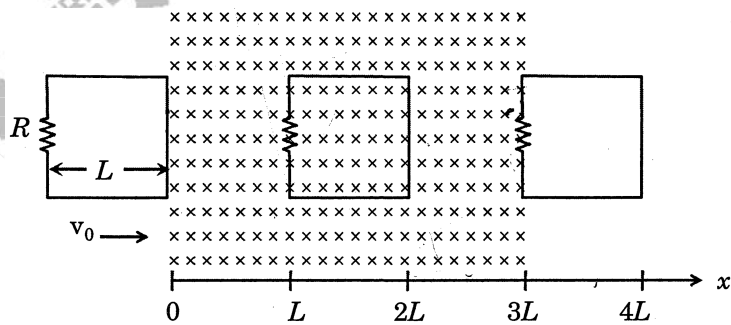
$$T^2 = 4\pi^2 \frac{7}{5} \left(\frac{R-r}{g} \right)$$

$$g = \frac{28\pi^2}{5} \left(\frac{R-r}{T^2} \right)$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \left(\frac{\Delta R + \Delta r}{R-r} \right) + 2 \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{50} + 2 \times 0.0357$$

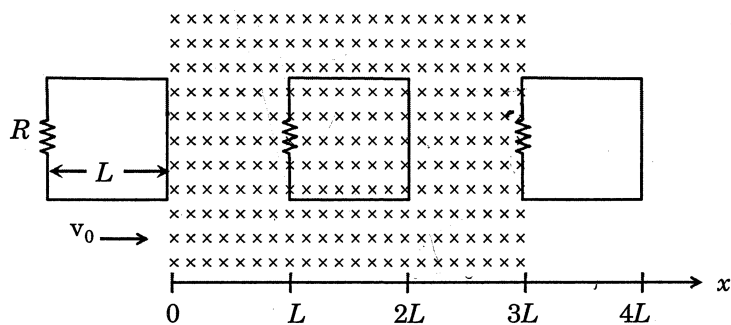
$$\therefore \frac{\Delta g}{g} \times 100 \approx 11\%$$

9. A rigid wire loop of square shape having side of length L and resistance R is moving along the x -axis with a constant velocity v_0 in the plane of the paper. At $t = 0$, the right edge of the loop enters a region of length $3L$ where there is a uniform magnetic field B_0 into the plane of the paper, as shown in the figure. For sufficiently large v_0 , the loop eventually crosses the region. Let x be the location of the right edge of the loop. Let $v(x)$, $I(x)$ and $F(x)$ represent the velocity of the loop, current in the loop, and force on the loop, respectively, as a function of x . Counter-clockwise current is taken as positive.

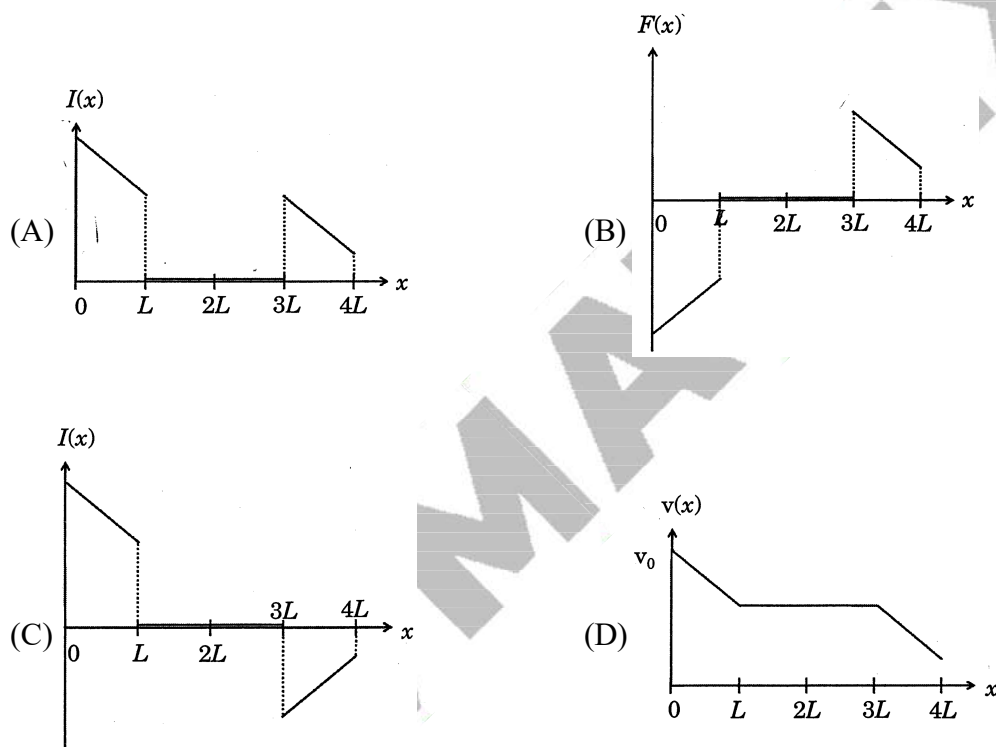


Which of the following schematic plot(s) is(are) correct? (Ignore gravity)

एक वर्गीय आकृति वाला तार का दृढ़ फंदा, जिसके भुजा की लंबाई L एवं प्रतिरोध R है, x -अक्ष की दिशा में एक स्थिर गति v_0 से इस कागज के प्लेन पर (plane of the paper) गतिमान है। समय $t = 0$ पर फंदे का दाहिना किनारा $3L$ लंबाई के स्थिर चुंबकीय क्षेत्र B_0 में प्रवेश करता है। चुंबकीय रेखाओं की दिशा कागज के प्लेन के लंबवत् अंदर की ओर है (जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है)। v_0 का मान पर्याप्त होने पर अंततोगत्वा फंदा चुंबकीय क्षेत्र को पार करता है। मान लीजिए की फंदे की दाहिनी भुजा स्थान x पर है। फंदे की गति, फंदे में धारा एवं फंदे पर बल की x पर निर्भरता को क्रमशः $v(x)$, $I(x)$ एवं $F(x)$ से निरूपित किया गया है। वामवर्त धारा को पोजिटिव लें।



निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे व्यवस्था चित्र सही है/हैं? (गुरुत्वाकर्षण नगण्य माने)



Ans. CD

Sol. For right edge of loop from $x = 0$ to $x = L$

$$i = + \frac{vBL}{R}$$

$$F = iLB = \frac{vB^2L^2}{R} \text{ (leftwards)}$$

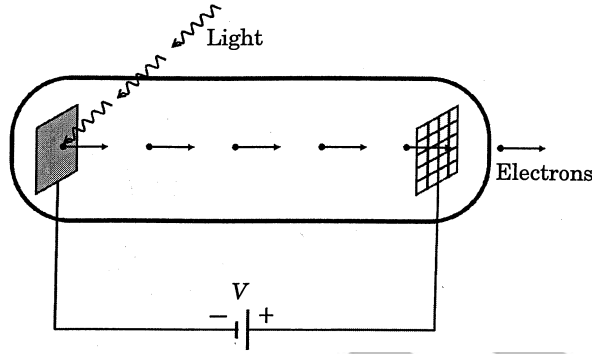
$$-mv \frac{dv}{dx} = \frac{vB^2L^2}{R}$$

$$v(x) = v_0 - \frac{B^2L^2}{mR} x$$

$$i(x) = \frac{v_0BL}{R} - \frac{B^3L^3}{mR^2} x$$

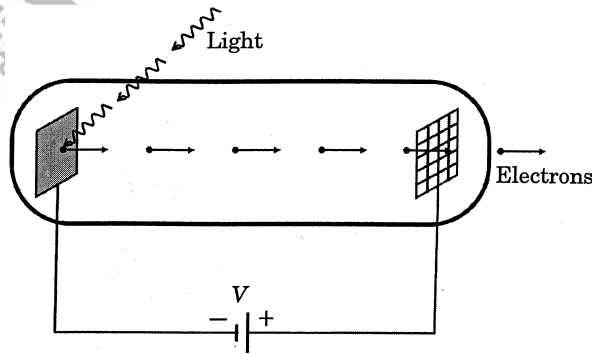
$$F(x) = \frac{v_0 B^2 L^2}{R} - \frac{B^4 L^4}{mR^2} x \text{ (leftwards)}$$

10. Light of wavelength λ_{ph} falls on a cathode plate inside a vacuum tube as shown in the figure. The work functions of the cathode surface is ϕ and the anode is a wire mesh of conducting material kept at a distance d from the cathode. A potential difference V is maintained between the electrodes. If the minimum de Broglie wavelength of the electrons passing through the anode is λ_e , which of the following statement(s) is(are) true?



- (A) For large potential difference ($V \gg \phi/e$), λ_e is approximately halved if V is made four times
 (B) λ_e increases at the same rate as λ_{ph} for $\lambda_{ph} < hc/\phi$
 (C) λ_e is approximately halved, if d is doubled
 (D) λ_e decreases with increase in ϕ and λ_{ph}

λ_{ph} तरंगदैर्घ्य का प्रकाश निर्वात नलिका (vacuum tube) के अंदर एक कैथोड पर गिरता है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है। कैथोड की सतह का कार्यफलन ϕ है एवं एनोड, जो कि एक चालकीय पदार्थ के तारों की जाली है, कैथोड से d दूरी पर स्थित है। इलेक्ट्रोडों के बीच का विभवान्तर V स्थिर है। यदि एनोड को पार करने वाले इलेक्ट्रॉनों की न्यूनतम डी ब्रॉग्ली (de Broglie) तरंगदैर्घ्य λ_e है, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?



- (A) उच्च विभवान्तर ($V \gg \phi/e$) पर अगर V को चार गुना बढ़ाया जाए तो λ_e लगभग आधा हो जाएगा।
 (B) अगर $\lambda_{ph} < hc/\phi$ है तो λ_{ph} के साथ λ_e एक समान दर से बढ़ेगा।
 (C) d को दुगुना करने पर λ_e लगभग आधा हो जाएगा।
 (D) ϕ और λ_{ph} को बढ़ाने पर λ_e कम होगा।

Ans. A

Sol. Equation Becomes

$$\frac{hc}{\lambda_{ph}} + eV - \phi = \frac{p_{max}^2}{2m}$$

$$\frac{hc}{\lambda_{pH}} + eV - \phi = \frac{h^2}{2m\lambda_e^2}$$

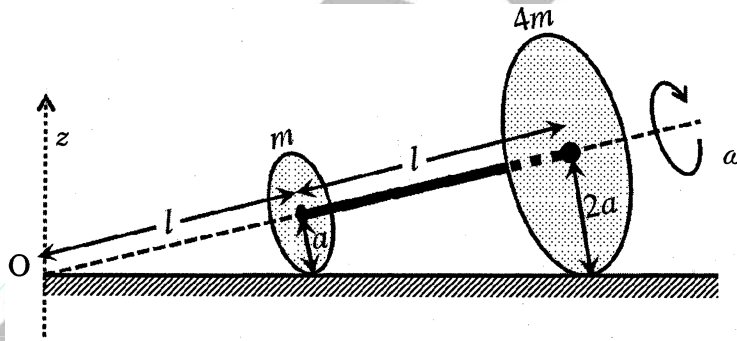
For $V \gg \frac{\phi}{e}$

$$\Rightarrow \phi \ll eV \quad \text{and} \quad \frac{hc}{\lambda_{pH}} \ll eV \Rightarrow eV = \frac{h^2}{2m\lambda_e^2}$$

$$\lambda_e \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$$

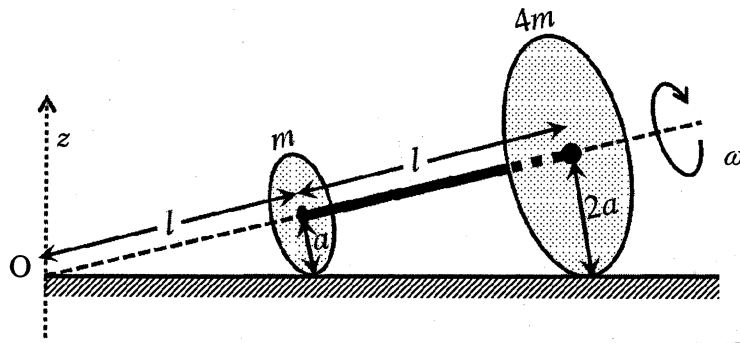
when V is made four times λ_e is halved.

11. Two thin circular discs of mass m and $4m$, having radii of a and $2a$, respectively, are rigidly fixed by a massless, rigid rod of length $l = \sqrt{24}a$ through their centres. This assembly is laid on a firm and flat surface, and set rolling without slipping on the surface so that the angular speed about the axis of the rod is ω . The angular momentum of the entire assembly about the point 'O' is \vec{L} (see the figure). Which of the following statement(s) is(are) true?



- (A) The magnitude of angular momentum of the assembly about its center of mass is $17ma^2\omega/2$
 (B) The magnitude of the z -component of \vec{L} is $55ma^2\omega$
 (C) The magnitude of angular momentum of center of mass of the assembly about the point O is $81ma^2\omega$
 (D) The center of mass of the assembly rotates about the z -axis with an angular speed of $\omega/5$

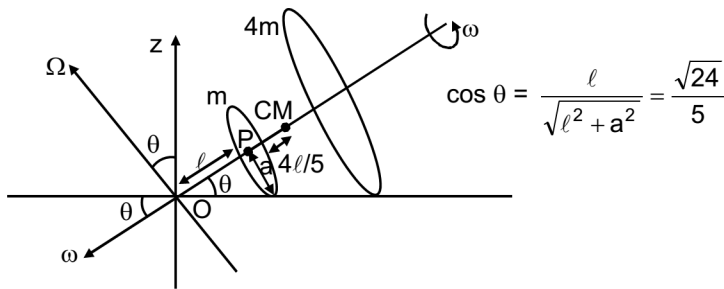
m तथा $4m$ द्रव्यमान वाली दो पतली वृताकार चत्रिकाएँ (discs), जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः a तथा $2a$ है, के केन्द्रों को $l = \sqrt{24}a$ लम्बाई की द्रव्यमान रहित दृढ़ डंडी से जोड़ा गया है। इस समूह को एक मजबूत समतल सतह पर लिटाया गया है और फिसलाये बिना इस तरह से घुमाया गया है कि इसकी कोणीय गति डंडी के अक्ष के गिर्द ω है। पूरे समूह का बिन्दु 'O' के गिर्द कोणीय संवेग \vec{L} है (चित्र देखियें)। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?



- (A) पूरे समूह का उसके संहति-केंद्र के गिर्द कोणीय संवेग का परिमाण $17ma^2\omega/2$ है
 (B) \vec{L} के z-घटक का परिमाण $55ma^2\omega$ है
 (C) पूरे समूह के संहति-केंद्र का बिन्दु O के गिर्द कोणीय संवेग का परिमाण $81ma^2\omega$ है
 (D) पूरे समूह का संहति-केंद्र z-अक्ष के गिर्द कोणीय वेग $\omega/5$ से घूम रहा है

Ans. AD

Sol.



(D) Velocity of point P: $a\omega = l\Omega$ then

$$\Omega = \frac{a\omega}{l} = \text{Angular velocity of C.M. w.r.t point O.}$$

Angular velocity of C.M. w.r.t z axis = $\Omega \cos \theta$

$$\omega_{\text{C.M.-z}} = \frac{a\omega}{l} \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{a\omega}{\sqrt{24}a} \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\omega_{\text{CM-z}} = \frac{\omega}{5}$$

$$(B) L_{\text{D-CM}} = \frac{ma^2}{2} \omega + \frac{4m(2a)^2}{2} \omega = \frac{17ma^2\omega}{2}$$

$$(C) L_{\text{CM-O}} = (5m) \left[\frac{9l}{5} \Omega \right] \frac{9l}{5} = \frac{81ml^2\Omega}{5} = \frac{81ml^2}{5} \times \frac{a\omega}{l}$$

$$L_{\text{CM-O}} = \frac{81m/a\omega}{5} = \frac{81\sqrt{24}a^2m\omega}{5}$$

$$(A) L_z = L_{\text{CM-O}} \cos \theta - L_{\text{D-CM}} \sin \theta$$

$$= \frac{81\sqrt{24}}{5} a^2 m \omega \times \frac{\sqrt{24}}{5} - \frac{17ma^2\omega}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{81 \times 24ma^2\omega}{25} - \frac{17ma^2\omega}{2\sqrt{24}}$$

12. Consider two identical galvanometers and two identical resistors with resistance R. If the internal resistance of the galvanometers $R_c < R/2$, which of the following statement(s) about any one of the galvanometers is(are) true?

- (A) The maximum voltage range is obtained when all the components are connected in series
 (B) The maximum voltage range is obtained when the two resistors and one galvanometer are connected in series, and the second galvanometer is connected in parallel to the first galvanometer
 (C) The maximum current range is obtained when all the components are connected in parallel
 (D) The maximum current range is obtained when the two galvanometers are connected in series and the combination is connected in parallel with both the resistors

दो एकसमान गेल्वेनोमीटर तथा एकसमान प्रतिरोध R वाले दो प्रतिरोधक दिये गये हैं। यदि गेल्वेनोमीटर का आंतरिक प्रतिरोध $R_c < R/2$ है, तो किसी भी एक गेल्वेनोमीटर के बारे में दिये गए निम्नलिखित कथनों में से कौनसा/कौनसे सत्य है/हैं?

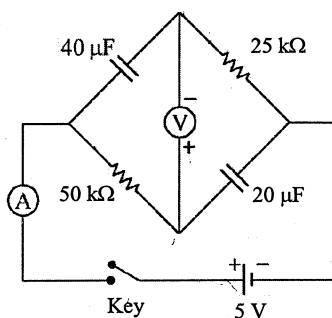
- (A) प्राप्त की गई वोल्टता परिसर अधिकतम होगी जब सभी घटक श्रेणी में जुड़े हुए हैं
 (B) प्राप्त की गई वोल्टता परिसर अधिकतम होगी जब दो प्रतिरोधक तथा एक गेल्वेनोमीटर श्रेणी में जुड़े हैं तथा दूसरा गेल्वेनोमीटर पहले गेल्वेनोमीटर के समानान्तर में जुड़ा है
 (C) प्राप्त की गई धारा परिसर अधिकतम होगी जब सभी घटक समानान्तर में जुड़े हैं
 (D) प्राप्त की गई धारा परिसर अधिकतम होगी जब दो गेल्वेनोमीटर श्रेणी में जुड़े हैं तथा ये संयोजन प्रतिरोधकों के साथ समानान्तर में जुड़ा है।

Ans. AC

Sol. For maximum voltage range across a galvanometer, all the elements must be connected in series.

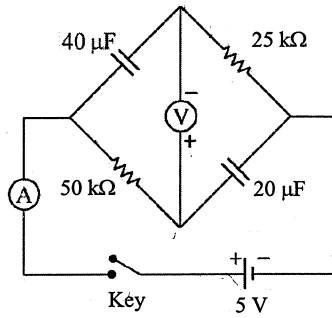
For maximum current range through a galvanometer, all the elements should be connected in parallel.

13. In the circuit shown below, the key is pressed at time $t = 0$. Which of the following statement(s) is(are) true?



- (A) The voltmeter displays $-5V$ as soon as the key is pressed, and displays $+5V$ after a long time
 (B) The voltmeter will display $0V$ at time $t = \ln 2$ seconds
 (C) The current in the ammeter becomes $1/e$ of the initial value after 1 second
 (D) The current in the ammeter becomes zero after a long time

नीचे दिखाये गये परिपथ में समय $t = 0$ पर बटन को दबाया गया है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

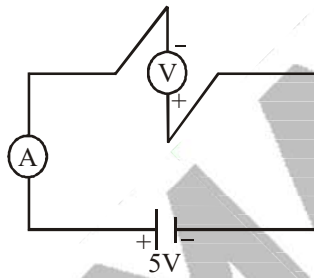


- (A) टिन को दबाते ही वोल्टमीटर $-5V$ दिखाता है जबकि लंबे समय के बाद वो $+5V$ दिखाता है।
 (B) समय $t = \ln 2$ सैकण्ड पर वोल्टमीटर शून्य वोल्ट दिखाता है
 (C) 1 सैकण्ड के बाद अमीटर में धारा प्रारम्भिक धारा का $1/e$ गुणा होती है
 (D) लंबे समय के बाद अमीटर में धारा शून्य हो जाती है

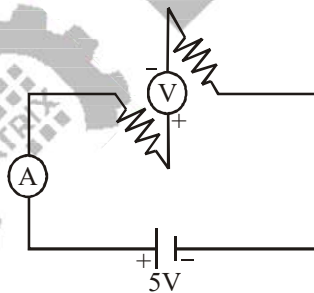
Ans. ABCD

Sol. (A)

At $t = 0$



At $t = \infty$



(B) At $t = \ln 2$

$$\Delta V_{40\mu f} = \Delta V_{50k\Omega}$$

(C) Using

$$q = q_0 (1 - e^{-t/RC})$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

14. A block with mass M is connected by a massless spring with stiffness constant k to a rigid wall and moves without friction on a horizontal surface. The block oscillates with small amplitude A about an equilibrium position x_0 . Consider two cases : (i) when the block is at x_0 ; and (ii) when the block is at $x = x_0 + A$. In both the cases, a particle with mass $m (< M)$ is softly placed on the block after which they stick to each other. Which of the following statement(s) is(are) true about the motion after the mass m is placed on the mass M ?

(A) The amplitude of oscillation in the first case changes by a factor of $\sqrt{\frac{M}{m+M}}$, whereas in the second case it remains unchanged

(B) The final time period of oscillation in both the cases is same

(C) The total energy decreases in both the cases

(D) The instantaneous speed at x_0 of the combined masses decreases in both the cases.

एक द्रव्यमान-रहित स्प्रिंग, जिसका द्रढता गुणांक k है, के एक छोर पर M द्रव्यमान का एक गुटका जुड़ा है, तथा दूसरे छोर को दृढ़ दीवार से जोड़ा गया है। यह गुटका एक समतल घर्षण-रहित सतह पर एक संतुलित स्थिति x_0 के गिर्द छोटे आयाम A से दोलन करता है। यहां दो परिस्थितियां मानिए (i) जब गुटका x_0 पर है और (ii) जब गुटका $x = x_0 + A$ पर है। दोनों परिस्थितियों में द्रव्यमान $m (< M)$ के एक कण को गुटके पर धीरे से इस प्रकार रखा जाता है कि वह तुरंत गुटके से चिपक जाता है। कण को गुटके के ऊपर रखने के बाद गति के बारे में निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

(A) पहली परिस्थिति में दोलन का आयाम $\sqrt{\frac{M}{m+M}}$ भाज्य से परिवर्तित होता है, जबकि दूसरी परिस्थिति में यह अपरिवर्तित रहता है

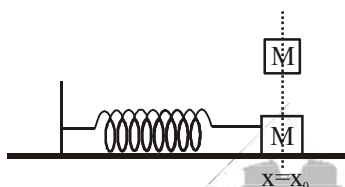
(B) दोनों परिस्थितियों में दोलन का अंतिम समयकाल समान है

(C) दोनों परिस्थितियों में सम्पूर्ण ऊर्जा कम हो जाती है

(D) सम्मिलित द्रव्यमान की x_0 पर तात्क्षणिक गति दोनों परिस्थितियों में कम हो जाती है।

Ans. ABD

Sol.

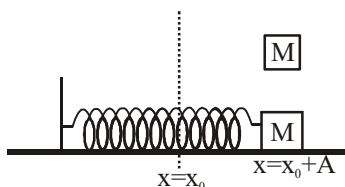


$$Mv = (m + M)v'$$

$$v' = \left(\frac{M}{m + M} \right) v$$

$$A'\omega' = \left(\frac{M}{m + M} \right) A\omega$$

$$A' = \sqrt{\frac{M}{m + M}} A$$



No change in Amplitude and no loss of energy.

SECTION-III (Maximum Marks : 12)

PARAGRAPH 1

A frame of reference that is accelerated with respect to an inertial frame of reference is called a non-inertial

frame of reference. A coordinate system fixed on a circular disc rotating about a fixed axis with a constant angular velocity ω is an example of a non-inertial frame of reference. The relationship between the force \vec{F}_{rot} experienced by a particle of mass m moving on the rotating disc and the force \vec{F}_{in} experienced by the particle in an inertial frame of reference is

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \vec{F}_{\text{in}} + 2m(\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega},$$

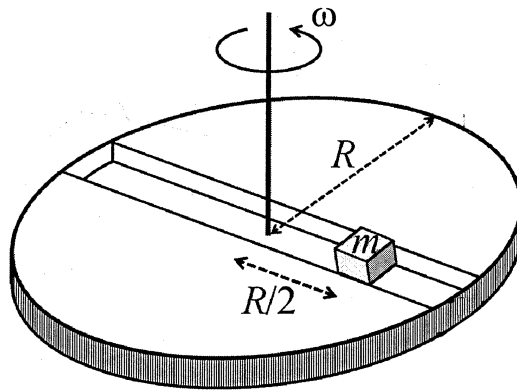
where \vec{v}_{rot} is the velocity of the particle in the rotating frame of reference and \vec{r} is the position vector of the particle with respect to the centre of the disc.

Now consider a smooth slot along a diameter of a disc of radius R rotating counter-clockwise with a constant angular speed ω about its vertical axis through its center. We assign a coordinate system with the origin at the center of the disc, the x -axis along the slot, the y -axis perpendicular to the slot and the z -axis along the rotation axis ($\vec{\omega} = \omega\hat{k}$). A small block of mass m is gently placed in the slot at $\vec{r} = (R/2)\hat{i}$ at $t=0$ and is constrained to move only along the slot.

एक निर्देश तंत्र जो एक जड़त्विय निर्देश तंत्र की तुलना में त्वरित हो, अजड़त्विय निर्देश तंत्र कहलाता है। स्थिर कोणीय वेग ω से घूमती हुई डिस्क पर बद्ध निर्देश तंत्र अजड़त्विय तंत्र का एक उदाहरण है। m द्रव्यमान का एक कण घूमती हुई डिस्क पर गतिमान है। गतिमान कण डिस्क पर बद्ध निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल \vec{F}_{rot} तथा एक जड़त्विय निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल \vec{F}_{in} को महसूस करता है। \vec{F}_{rot} तथा \vec{F}_{in} के बीच का संबंध निम्नलिखित समीकरण में दिया गया है

$$\vec{F}_{\text{rot}} = \vec{F}_{\text{in}} + 2m(\vec{v}_{\text{rot}} \times \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega},$$

यहाँ पर \vec{v}_{rot} घूमते हुए निर्देश तंत्र में कण का वेग है तथा \vec{r} कण का डिस्क के मध्य बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश है। मानिए कि R त्रिज्या की एक डिस्क, जिसमें व्यास के समानान्तर एक घर्षणरहित खाँचा है, एक स्थिर कोणीय गति ω से अपने अक्ष पर वामावर्त दिशा में घूम रही है। एक निर्देश तंत्र मानिए जिसका मूलबिंदू डिस्क के मध्य बिन्दु पर है एवं x -अक्ष खाँचे के समानान्तर है, y -अक्ष खाँचे के अभिलम्ब पर है एवं z -अक्ष घूमने वाली अक्ष के समानान्तर है ($\vec{\omega} = \omega\hat{k}$)। m द्रव्यमान वाले एक छोटे गुटके को समय $t=0$ पर $\vec{r} = (R/2)\hat{i}$ बिन्दु पर धीरे से इस तरह से रखा जाता है कि वो सिर्फ खाँचे में ही चल सके।



15. The distance r of the block at time t is -
समय t पर गुटके की दूरी r का मान है -

- (A) $\frac{R}{4}(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t})$ (B) $\frac{R}{2}\cos 2\omega t$ (C) $\frac{R}{2}\cos \omega t$ (D) $\frac{R}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

Ans. D

Sol. $m\omega^2 = ma$

$$a = r\omega^2$$

$$\frac{v dv}{dr} = r\omega^2 \quad ; \quad \int_0^v v dv = \omega^2 \int_{R/2}^r r dr$$

$$v = \omega \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}$$

$$\int_{R/2}^r \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}} = \int_0^t \omega dt \quad \dots(1)$$

Assume : $r = \frac{R}{2} \sec \theta$

$$dr = \frac{R}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta; \int \frac{\frac{R}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{\frac{R^2}{4} \tan^2 \theta}} = \int_0^t \omega dt; \omega t = \ln \left[\frac{2r}{R} + \frac{\sqrt{4r^2 - R^2}}{R} \right]$$

$$r = \frac{R}{4} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}]$$

16. The net reaction of the disc on the block is -

गुटके पर डिस्क की नेट प्रतिक्रिया है -

- (A) $-m\omega^2 R \cos \omega t \hat{j} - mg \hat{k}$ (B) $m\omega^2 R \sin \omega t \hat{j} - mg \hat{k}$
 (C) $\frac{1}{2} m\omega^2 R (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \hat{j} + mg \hat{k}$ (D) $\frac{1}{2} m\omega^2 R (e^{2\omega t} - e^{-2\omega t}) \hat{j} - mg \hat{k}$

Ans. C

Sol. $F_y = 2m\omega \frac{dr}{dt}$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 R (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \hat{j}$$

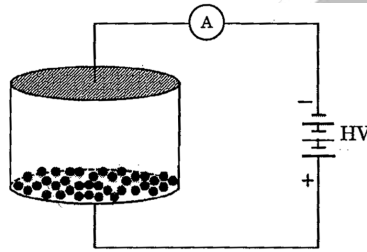
$$F_z = mg \hat{k}$$

PARAGRAPH 2

Consider an evacuated cylindrical chamber of height h having rigid conducting plates at the ends and an insulating curved surface as shown in the figure. A number of spherical balls made of a light weight and soft material and coated with a conducting material are palced on the bottom plate. The balls have a radius $r \ll h$. Now a high voltage source (HV) is connected across the conducting plates such that the bottom plate is at $+V_0$ and the top plate at $-V_0$. Due to their conducting surface, the balls will get charged, will becomes equipotential with the plate and are repelled by it. The balls will eventually collide with the top, where the coefficient of restitution

can be taken to be zero due to the soft nature of the material of the balls. The electric field in the chamber can be considered to be that of a parallel plate capacitor. Assume that there are no collision between the balls and the interaction between them is negligible. (Ignore gravity)

h ऊंचाई वाले निर्वातित एक बेलनाकार कक्ष के दोनों छोरों पर दो दृढ़ चालक पट्टीकारणें हैं और उसका वक्रप्रष्ट अचालक है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। कम भार वाली मुलायम पदार्थ से बनी हुयी कई गोलाकार गोलियों, जिनकी सतह पर एक चालक पदार्थ की परत चढ़ी है, नीचे वाली पट्टिका पर रखी हुई है। इन गोलियों की त्रिज्या $r \ll h$ है। अब एक उच्च वोल्टता का स्रोत (HV) इस तरह से जोड़ा जाता है कि नीचे वाली पट्टिका पर $+V_0$ एवं ऊपर वाली पट्टिका पर $-V_0$ का विभव आ जाता है। चालक परत के कारण गोलियाँ आवेशित होकर पट्टिका के साथ समविभव हो जाती हैं जिसके कारण वे पट्टिका से प्रतिकर्षित होती हैं। अंततोगत्वा गोलियाँ ऊपरी पट्टिका से टकराती हैं, जहाँ पर गोलियों के पदार्थ की मुलायम प्रकृति के कारण प्रत्यवस्थान गुणांक (coefficient of restitution) को शून्य लिया जा सकता है। कक्ष में विद्युत क्षेत्र को समानान्तर पट्टिका वाले संधारित्र के समान माना जा सकता है। गोलियों की एक दूसरे से पारस्परिक क्रिया एवं टकराव को नगण्य माना जा सकता है। (गुरुत्वाकर्षण नगण्य है।)



17. Which one of the following statements is correct ?
- (A) The balls will bounce back to the bottom plate carrying the opposite charge they went up with
(B) The balls will execute simple harmonic motion between the two plates
(C) The balls will bounce back to the bottom plate carrying the same charge they went up with
(D) The balls will stick to the top and remain there

निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है?

- (A) गोलियाँ जिस आवेश के साथ ऊपर जाती हैं उसके विपरीत आवेश के साथ उछलकर निचली पट्टिका पर वापस आ जाती हैं
(B) गोलियाँ दोनों पट्टिकाओं के बीच सरल आवर्त गति निष्पाद करेगी
(C) गोलियाँ जिस आवेश के साथ ऊपर जाती हैं उसी आवेश के साथ उछलकर निचली पट्टिका पर वापस आ जाती हैं
(D) गोलियाँ ऊपरी पट्टिका पर चिपककर वहीं रह जाती हैं

Ans. A

Sol. After coming in contact with upper plate, spherical balls will transfer their positive charge there by completing the flow of charge in the circuit and they will become negatively charged. Then due to electric field, they will again come back to lower plate and the process will repeat.

18. The average current in the steady state registered by the ammeter in the circuit will be

- (A) proportional to $V_0^{1/2}$ (B) proportional to V_0^2
(C) proportional to the potential V_0 (D) zero

परिपथ में लगाए अमीटर में स्थायी अवस्था में औसत धारा –

- (A) $V_0^{1/2}$ के समानुपाती होगी (B) V_0^2 के समानुपाती होगी
(C) V_0 के समानुपाती होगी (D) का मान शून्य होगा



Sol. $i_{\text{avg}} = \frac{q}{\Delta t}$

$q \propto V_0$ (charge carried by spherical balls)
time taken in going from one plate to another

$$\frac{1}{2}at^2 = h$$

$$\frac{1}{2} \frac{q \left(\frac{V_0}{h} \right)}{m} t^2 = h$$

$$t = \sqrt{\frac{2mh^2}{qV_0}}$$

$$i_{\text{avg}} \propto V_0^2$$

MATRIX

