PART I : MATHEMATICS
SECTION-III
[SINGLE CORRECT CHOICE TYPE]

Q.1 to Q.6 has four choices (A), (B), (C), (D) out of which ONLY ONE is correct.

37. Let $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ and I be the identity matrix of order 3. If $Q = [q_{ij}]$ is a matrix such that $P^{50} - Q = I$, then $\dfrac{q_{31} + q_{32}}{q_{21}}$ equals

माना कि $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ और I तीन कोटि का तत्समक आव्यूह है। यदि $Q = [q_{ij}]$ एक आव्यूह इस प्रकार है कि $P^{50} - Q = I$ है, तब $\dfrac{q_{31} + q_{32}}{q_{21}}$ का मान है।

(A) 52 (B) 103 (C) 201 (D) 205

Ans. B

Sol. Let $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{bmatrix} = I + A$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^n = 0 \quad \forall\ n \geq 3$

Given : $P^{50} = Q + I$

$$\Rightarrow I + Q = (I + A)^{50} = I + 50A + \frac{50 \times 49}{2} A^2 + 0$$

$$\Rightarrow Q = 50\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \frac{50 \times 49}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_{31} = 50 \times 16 + \left(\frac{50 \times 49}{2}\right)16 = 200 \times 102$$

$q_{32} = 50 \times 4 = 200,\ q_{21} = 50 \times 4 = 200$

$$\frac{q_{31}+q_{32}}{q_{21}}=103$$

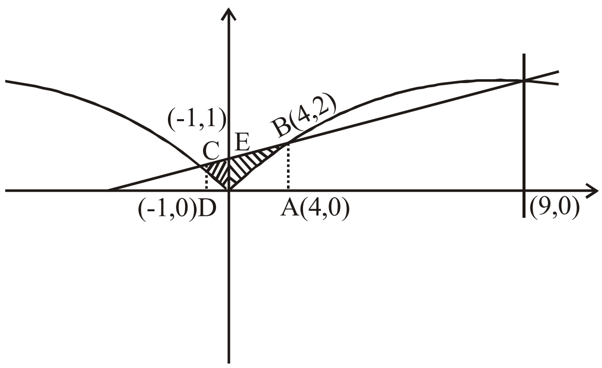
38. Area of the region $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq\sqrt{|x+3|}, 5y\leq x+9\leq 15\right\}$ is equal to

क्षेत्र $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq\sqrt{|x+3|}, 5y\leq x+9\leq 15\right\}$ का क्षेत्रफल है –

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$

Ans. C

Sol. Shifting origin to (–3, 0)



Area $\left\{(x,y)\in R^2 : y\geq\sqrt{|x|}, 5y\leq x+6\leq 15\right\}$

Desired Area = Area of trapezium ABCDA – [Area DCOD + Area OBAO]

$$=\frac{1}{2}\times(1+2)\times 5-\left(\int_{-1}^{0}\sqrt{-x}\ dx+\int_{0}^{4}\sqrt{x}\ dx\right)$$

$$=\frac{15}{2}-\left(\frac{2}{3}+\frac{16}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

39. The value of $\displaystyle\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(k-1)\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{6}\right)}$ is equal to

$\displaystyle\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(k-1)\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{6}\right)}$ का मान है।

(A) $3-\sqrt{3}$ (B) $2\left(3-\sqrt{3}\right)$ (C) $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ (D) $2\left(2+\sqrt{3}\right)$

Ans. C

Sol. $$\sum_{k=1}^{13}\frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{6}\right)-\left(\frac{\pi}{4}+(k-1)\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sin\frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+(k-1)\frac{\pi}{6}\right)\right)}=2\sum_{k=1}^{13}\left(\cot\left(\frac{\pi}{4}+(k-1)\frac{\pi}{6}\right)-\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{6}\right)\right)$$

$$=2\left(\cot\frac{\pi}{4}-\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{13\pi}{6}\right)\right)=2\left(1-\cot\left(\frac{29\pi}{12}\right)\right)=2\left(1-\cot\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=2(1-(2-\sqrt{3}))=2(-1+\sqrt{3})$$

$$=2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

40. Let $b_i > 1$ for $i = 1, 2, ..., 101$. Suppose $\log_e b_1, \log_e b_2, ..., \log_e b_{101}$ are in Arithmetic Progression (A.P.) with the common difference $\log_e 2$. Suppose $a_1, a_2, ... a_{101}$ are in A.P. such that $a_1 = b_1$ and $a_{51} = b_{51}$. If $t = b_1 + b_2 + ... + b_{51}$ and $s = a_1 + a_2 + ... + a_{51}$, then

(A) $s > t$ and $a_{101} > b_{101}$ (B) $s > t$ and $a_{101} < b_{101}$

(C) $s < t$ and a_{101} and b_{101} (D) $s < t$ and $a_{101} < b_{101}$

माना कि $i = 1, 2, ..., 101$ के लिए $b_i > 1$ है। मान लीजिए कि $\log_e b_1, \log_e b_2, ..., \log_e b_{101}$ सार्वअंतर $\log_e 2$ वाली समांतर श्रेणी में है। मान लीजिए कि $a_1, a_2, ... a_{101}$ समांतर श्रेणी में इस प्रकार है कि $a_1 = b_1$ तथा $a_{51} = b_{51}$. यदि $t = b_1 + b_2 + ... + b_{51}$ तथा $s = a_1 + a_2 + ... + a_{51}$ हैं, तो

(A) $s > t$ और $a_{101} > b_{101}$ (B) $s > t$ और $a_{101} < b_{101}$

(C) $s < t$ और a_{101} and b_{101} (D) $s < t$ और $a_{101} < b_{101}$

Ans. B

Sol. If $\log_e b_1, \log_e b_2 ..... \log_e b_{101}$ $\rightarrow$ A.P.

then $b_1, b_2, ... b_{101}$ $\rightarrow$ G.P.

Given $a_1 = b_1$ and $a_{51} = b_{51}$

$a_1, a_2, a_3 .... a_{50}, a_{51}$ are in Arithmetic progression.

Here, We can say $a_2, a_3, ... a_{50}$ areArithmetic means between a_1 and a_{50}.

By A.M. > G.M.

$a_2 > b_2, a_3 > b_3, ...$

$\Rightarrow s > t$

Also a_1, a_{51}, a_{101} are in Arithmetic Progression and b_1, b_{51}, b_{101} are in Geometric Progression.

$\Rightarrow b_{101} > a_{101}$ ($\therefore$ $a_1 = b_1, a_{51} = b_{51}$)

41. The value of $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos x}{1+e^x} dx$ is equal to

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos x}{1+e^x} dx$ का मान है।

(A) $\frac{\pi^2}{4}-2$ (B) $\frac{\pi^2}{4}+2$ (C) $\pi^2 - e^{\frac{\pi}{2}}$ (D) $\pi^2 + e^{\frac{\pi}{2}}$

Ans. A

Sol. Apply $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$

Let $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \cos x}{1+e^x} dx$ $\Rightarrow 2I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \cos x}{1+e^x} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \cos x}{1+e^{-x}} dx$

$I = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx = \left[x^2 \sin x - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2$

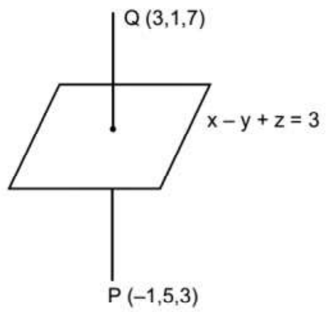
42. Let P be the image of the point (3, 1, 7) with respect to the plane $x - y + z = 3$. Then the equation of the plane passing through P and containing the straight line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ is

माना कि बिन्दु (3, 1, 7) का, समतल $x - y + z = 3$ के सापेक्ष प्रतिबिम्ब P है। तब बिन्दु P से गुजरने वाली और सरल रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ को धारण करने वाले समतल का समीकरण है।

(A) $x + y - 3z = 0$ (B) $3x + z = 0$ (C) $x - 4y + 7z = 0$ (D) $2x - y = 0$

Ans. C

Sol.



Get image of P(1,3,7) with respect to given plane i.e. Q(–1,5,3)

Normal vector $= \overrightarrow{OQ} \times (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= \hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

Equation of plane will be $x - 4y + 7z = \lambda$

Point (0, 0, 0) will lie in the plane

$\Rightarrow 0 = \lambda$

So the required plane is $x - 4y + 7z = 0$

[MULTIPLE CORRECT CHOICE TYPE]

Q.1 to Q.6 has four choices (A), (B), (C), (D) out of which ONLY ONE is correct.

43. Let $a, b \in \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = a\cos(|x^3 - x|) + b|x|\sin(|x^3 + x|)$. Then f is

(A) differentiable at $x = 0$ if $a = 0$ and $b = 1$

(B) differentiable at $x = 1$ if $a = 1$ and $b = 0$

(C) NOT differentaible at $x = 0$ at $a = 1$ and $b = 0$

(D) NOT differentiable at $x = 1$ if $a = 1$ and $b = 1$

माना कि $a, b \in \mathbb{R}$ तथा $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos(|x^3 - x|) + b|x|\sin(|x^3 + x|)$ से परिभाषित है। तब f

(A) $x = 0$ पर अवकलनीय है यदि $a = 0$ और $b = 1$

(B) $x = 1$ पर अवकलनीय है यदि $a = 1$ और $b = 0$

(C) $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है यदि $a = 1$ और $b = 0$

(D) $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है यदि $a = 1$ और $b = 1$

Ans. AB

Sol. $f(x) = a\cos(x^3 - x) + bx\sin(x^3 + x) \qquad \forall x \in R$

Which is composition and sum of differentiable functions, therefore f(x) is always continuous and differentiable.

44. Let $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^n(x+n)(x+\frac{n}{2}).....(x+\frac{n}{n})}{n!(x^2+n^2)(x^2+\frac{n^2}{4}).....(x^2+\frac{n^2}{n^2})}\right)^{\frac{x}{n}}$, for all $x > 0$. Then

माना कि सभी $x > 0$ के लिए $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^n(x+n)(x+\frac{n}{2}).....(x+\frac{n}{n})}{n!(x^2+n^2)(x^2+\frac{n^2}{4}).....(x^2+\frac{n^2}{n^2})}\right)^{\frac{x}{n}}$ है। तब –

(A) $f\left(\frac{1}{2}\right) \ge f(1)$ (B) $f\left(\frac{1}{3}\right) \le f\left(\frac{2}{3}\right)$ (C) $f'(2) \le 0$ (D) $\frac{f'(3)}{f(3)} \ge \frac{f'(2)}{f(2)}$

Ans. BC

Sol. $$f(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}}\left(\frac{\prod\limits_{r=1}^{n}\left(x+\frac{n}{r}\right)}{\prod\limits_{r=1}^{n}\left(1-\frac{r}{n}\right)\prod\limits_{r=1}^{n}\left(x^2+\frac{n^2}{r^2}\right)}\right)^{\frac{x}{n}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}}\left[\left\{\sum_{r=1}^{n}\log\left(x+\frac{1}{r/n}\right).\frac{1}{n}\right\} - \left\{\sum_{r=1}^{n}\log\left(1-\frac{r}{n}\right).\frac{1}{n}\right\} - \left\{\sum_{r=1}^{n}\log\left(x^2+\frac{1}{(r/n)^2}\right).\frac{1}{n}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x\int_0^1\log\left(x+\frac{1}{t}\right)dt - \int_0^1\log(1-t)\,dt - \int_0^1\log\left(x^2+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x\int_0^1 \log\left(\frac{tx+1}{t^2x^2+1}\right)dt$$

put $tx = u$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int_0^x \log\left(\frac{u+1}{u^2+1}\right)du$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x \log\left(\frac{u+1}{u^2+1}\right)du$$

45. Let $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be twice differentiable functions such that f" and g" are continuous functions of $\mathbb{R}$. Suppose $f'(2)=g(2)$, $f''(2)\neq 0$ and $g'(2)\neq 0$. If $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{f'(x)g'(x)}=1$, then

(A) f has a local minimum at $x = 2$ (B) f has a local maximum at $x = 2$

(C) $f''(2) > f(2)$ (D) $f(x) - f''(x) = 0$ for at least one $x \in \mathbb{R}$

माना कि $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ और $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ऐसे दो बार अवकलनीय फलन है कि $\mathbb{R}$ पर f" और g" संतत फलन है। मान लीजिये कि $f'(2)=g(2)$, $f''(2)\neq 0$ और $g'(2)\neq 0$ है। यदि $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{f'(x)g'(x)}=1$ है, तब –

(A) $x = 2$ पर f का स्थानीय निम्नतम है (B) $x = 2$ पर f स्थानीय उच्चतम है।

(C) $f''(2) > f(2)$ (D) कम से कम एक $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) - f''(x) = 0$

Ans. AD

Sol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{f'(x)g'(x)}=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)g'(x)+f'(x)g(x)}{f'(x)g''(x)+f''(x)g'(x)}=1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{f''(x)}=1$

$\Rightarrow f(2) = f''(2) = +ve$ ($\because$ co-domain $(0,\infty)$)

Hence f has local maximum at $x = 2$.

46. Let $\hat{u} - u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ be a unit vector in $\mathbb{R}^3$ and $\hat{\omega}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$. Given that there exists a vector $\vec{\upsilon}$ in $\mathbb{R}^3$ such that $|\hat{u}\times\vec{\upsilon}|$ and $\hat{\omega}.(\hat{u}\times\vec{\upsilon})=1$. Which of the following statement(s) is(are) correct ?

(A) There is exactly one choice for such $\vec{\upsilon}$

(B) There are infinitely many choices for such $\vec{\upsilon}$

(C) If $\hat{u}$ lies in the xy-plane than $|u_1| = |u_2|$

(D) If $\hat{u}$ lies in the xz-plane than $2|u_1| = |u_3|$

माना कि $\mathbb{R}^3$ में $\hat{u} - u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ एक मात्रक सदिश है और $\hat{\omega}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ है। दिया हुआ है कि $\mathbb{R}^3$ में सदिश $\vec{\upsilon}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $|\hat{u}\times\vec{\upsilon}|$ और $\hat{\omega}.(\hat{u}\times\vec{\upsilon})=1$ है। निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सही है (हैं) ?

(A) इस प्रकार के $\vec{\upsilon}$ के लिए ठीक चयन संभव है।

(B) इस प्रकार के $\vec{\upsilon}$ के लिए अनन्त चयन संभव है।

(C) यदि $\hat{u}$, xy-समतल पर है तब $|u_1| = |u_2|$ है।

(D) यदि $\hat{u}$, xz-समतल पर है तब $2|u_1| = |u_3|$ है।

Ans. BC

Sol. $\hat{w}.(\hat{u}\times\vec{v}) = 1$

$\Rightarrow |\hat{w}||\hat{u}\times\vec{v}|\cos\alpha = 1$

$\cos\alpha = 1$

$\Rightarrow \hat{w}\perp\hat{u}$ and $\hat{w}\perp\vec{v}$

as it is given there exist a vector $\vec{v}$

$\Rightarrow$ $\hat{w}$ must be $\perp$ to $\hat{u}$

hence infinite many such $\vec{v}$ exists.

if $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$

$\vec{u}.\vec{w} = 0 \Rightarrow (u_1 + u_2) = 0$

$\Rightarrow |u_1| = |u_2|$

if $u = u_1\hat{i} + u_3\hat{k}$

$\vec{u}.\vec{w} = 0$

$u_1 + 2u_3 = 0$

$\Rightarrow |u_1| = 2|u_3|$.

47. Let P be the point on the parabola $y^2 = 4x$ which is at the shortest distance from the center S of the circle $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 64 = 0$. Let Q be the point on the circle dividing the line segment SP internally. Then

(A) $SP = 2\sqrt{5}$

(B) $SQ : QP = (\sqrt{5}+1) : 2$

(C) the x-intercept of the normal to the parabola at P is 6

(D) the slope of the tangent to the circle at Q is $\frac{1}{2}$

माना कि परवलय $y^2 = 4x$ पर P एक ऐसा बिन्दु है जो वृत $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 64 = 0$ के केन्द्र बिन्दु S से न्यूनतम दूरी पर है। माना कि वृत पर बिन्दु Q ऐसा है कि वह रेखाखंड SP को आंतरिक विभाजित करता है। तब

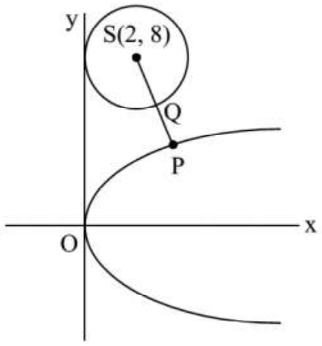
(A) $SP = 2\sqrt{5}$

(B) $SQ : QP = (\sqrt{5}+1) : 2$

(C) परवलय के बिंदु P पर अभिलम्ब का x अंतः खंड 6 है

(D) वृत के बिन्दु Q पर स्पर्श रेखा की ढाल $\frac{1}{2}$ है।

Ans. ACD

Sol. 

Equation of normal of parabola

$y + tx = 2t + t^3$

Normal passes through S(2, 8)

$8 + 2t = 2t + t^3$

$\Rightarrow \quad t = 2$

Hence $P \equiv (4, 4)$ and SQ = radius = 2

48. Let $a, b \in \mathbb{R}$ and $a^2 + b^2 \neq 0$. Suppose $S = \left\{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{a + ibt}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0\right\}$, where $i = \sqrt{-1}$. If $z = x + i y$ and $z \in S$, then (x, y) lies on

(A) the circle with radius $\frac{1}{2a}$ and centre $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ for $a > 0, b \neq 0$

(B) the circle with radius $= -\frac{1}{2a}$ and centre $\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ for $a < 0, b \neq 0$

(C) the x-axis for $a \neq 0, b = 0$

(D) the y-axis for $a = 0, b \neq 0$

माना कि $a, b \in \mathbb{R}$ और $a^2 + b^2 \neq 0$ है। मान लीजिए कि $S = \left\{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{a + ibt}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0\right\}$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। यदि $z = x + i y$ और $z \in S$ है, तब (x, y)

(A) उस वृत पर है जिसकी त्रिज्या $\frac{1}{2a}$ और केंद्र बिन्दु $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ है जब $a > 0, b \neq 0$

(B) उस वृत है कि जिसकी त्रिज्या $-\frac{1}{2a}$ और केन्द्र बिन्दु $\left(-\frac{1}{2a}, 0\right)$ for $a < 0, b \neq 0$

(C) x-अक्ष पर है जब $a \neq 0, b = 0$

(D) y-अक्ष पर है जब $a = 0, b \neq 0$

Ans. ACD

Sol. $x + iy = \frac{a - ibt}{a^2 + b^2t^2}$

$\Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2t^2}, \ y = \frac{-bt}{a^2 + b^2t^2}$

(C) for b = 0 $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{a}, y = 0$

(D) for a = 0 $\Rightarrow$ x = 0, $y = \frac{-1}{bt}$

(A) Eliminating t we get

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{a} = 0$$

49. Let a, λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Consider the system of linear equations

$ax + 2y = \lambda$

$3x - 2y = \mu$

Which of the following statement(s) is(are) correct ?

(A) If a = – 3, then the system has infinitely many solutions for all values of λ and μ

(B) If a $\neq$ – 3, then the system has a unique solution for all values of λ and μ

(C) If $\lambda + \mu = 0$, then the system has infinitely many solutions for a = – 3

(D) If $\lambda + \mu = 0$, then the system has no solution for a = –3

माना कि a, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ हैं। इन रैखिक समीकरणों के निकाय (system of linear equations) पर विचार कीजिए।

$ax + 2y = \lambda$

$3x - 2y = \mu$

निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सही है (हैं) ?

(A) यदि a = – 3, तब λ और μ के सभी मानों के लिए निकाय के अनन्त (infinitely many) हल हैं

(B) यदि a $\neq$ – 3, तब λ और μ के सभी मानों के लिए निकाय का अद्वितीय (unique) हल है

(C) यदि $\lambda + \mu = 0$, तब a = – 3 के लिए निकाय के अनन्त हल हैं

(D) यदि $\lambda + \mu = 0$, तब a = –3 के लिए निकाय का कोई हल नहीं है

Ans. BCD

Sol. System has unique solution for $\frac{a}{3} \neq \frac{2}{-2}$

system has infinitely many solution for $\frac{a}{3} = \frac{2}{-2} = \frac{\lambda}{\mu}$

and no solution for $\frac{a}{3} = \frac{2}{-2} \neq \frac{\lambda}{\mu}$

50. Let $f : \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ and $g" \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ be functions defined by $f(x) = [x^2 - 3]$ and $g(x) = |x|\, f(x) + |4x - 7|\, f(x)$, where [y] denotes the greatest integer less than or equal to y for $y \in \mathbb{R}$. Then

(A) f is discontinuous exactly at three points in $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

(B) f is discontinuous exactly at four points in $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

(C) g is NOT differentiable exactly at four points in $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

(D) g is NOT differentiable exactly at five point in $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

माना कि फलन $f:\left[-\frac{1}{2},2\right]\to\mathbb{R}$ और $g"\left[-\frac{1}{2},2\right]\to\mathbb{R}$, $f(x) = [x^2 - 3]$ और $g(x) = |x|\ f(x) + |4x - 7|\ f(x)$ से परिभाषित हैं, जहाँ $y \in \mathbb{R}$ के लिए y से कम या y के बराबर के महत्तम पूर्णांक (greatest integer less than or equal to y) को [y] द्वारा दर्शाया गया है। तब

(A) $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ में f ठीक तीन (exactly three) बिन्दुओं पर असंतत (discontinuous) है

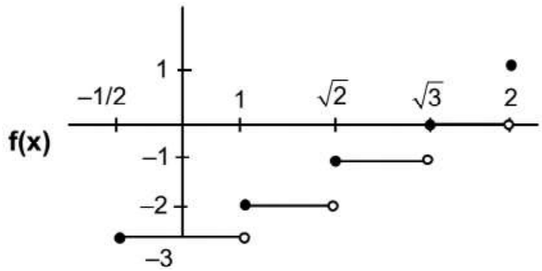
(B) $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ में f ठीक चार (exactly four) बिन्दुओं पर असंतत है

(C) $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ में g ठीक चार (exactly four) बिन्दुओं पर अवकलनीय (differentiable) नहीं है

(D) $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ में g ठीक पाँच (exactly five) बिन्दुओं पर अवकलनीय (differentiable) नहीं है

Ans. BC

Sol.



Clearly from the graph f is discontinuous at four points.

$g(x) = f(x)(|x|+|4x-7|)$

f(x) is non-differentiable at $x = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$

& $|x|+|4x-7|$ is non-differentiable at $x = 0, \frac{7}{4}$

But $f(x) = 0 \qquad \forall x \in \left[\sqrt{3}, 2\right]$

Hence g(x) is non-differentiable at $x = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$

[PARAGRAPH TYPE]

Q.13 to Q.16 has four choices (A), (B), (C), (D) out of which ONLY ONE is correct.

Paragraph for question nos. 51 to 52

Football teams T_1 and T_2 have to play two games against each other. It is assumed that the outcomes of the games are independent. The probabilities of T_1 wining, drawing and losing a game against T_2 and $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ and $\frac{1}{3}$, respectively. Each team gets 3 points for a win, 1 point for a draw and 0 point for a loss in a game. Let X and Y denote the total points scored by teams T_1 and T_2, respectively, after two games.

फुटबॉल दलों T_1 और T_2 को एक दूसरे के विरूद्ध दो खेल (games) खेलने हैं। यह मान लिया गया है कि दोनों खेलों के परिणाम एक दूसरे पर निर्भर नहीं करते। दल T_1 के दल T_2 के विरूद्ध एक खेल में जीतने, बराबर होने और हारने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। प्रत्येक दल जीतने पर 3 अंक, बराबरी पर 1 अंक हारने पर 0 अंक अर्जित करता है। माना कि दो खोलों के पश्चात दल T_1 और दल T_2 के द्वारा अर्जित कुल अंक क्रमशः X और Y है।

51. $P(X > Y)$ is :

$P(X > Y)$ का मान है

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{12}$

Ans. B

52. $P(X = Y)$ is :

$P(X = Y)$ का मान है

(A) $\frac{11}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{13}{36}$ (D) $\frac{1}{2}$

Ans. C

Sol. Let $W \equiv T_1$ wins

$L \equiv T_2$ wins

$D \equiv$ draw

$$P(X > Y) = P(WW) + P(WD) + P(DW)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

$$P(X = Y) = P(WL) + P(LW) + P(DD)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

Paragraph for question nos. 53 to 54

Let $F_1(x_1, 0)$ and $F_2(x_2, 0)$ for $x_2 < 0$ and $x_2 > 0$, be the foci of the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. Suppose a parabola having vertex at the origin and focus at F_2 intersects the ellipse at point M in the first quadrant and at point N in the fourth quadrant.

माना कि $F_1(x_1, 0)$ और $F_2(x_2, 0)$ (जिसमें $x_1 < 0, x_2 > 0$) दीर्घवृत्त (ellipse) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ की नाभियाँ (foci) हैं। माना कि एक परवलय (parabola) जिसका शीर्ष (vertex) मूलबिन्दु (origin) पर और नाभि (focus) F_2 पर है, दीर्घवृत्त को प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में M पर और चतुर्थ चतुर्थांश (fourth quadrant) में N पर प्रतिच्छेदित करता है।

53. The orthocentre of the triangle F_1MN is
त्रिभु F_1MN का लम्बकेन्द्र (orthocentre) है

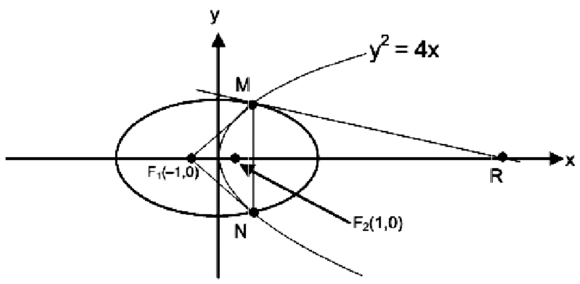
(A) $\left(-\frac{9}{10},0\right)$ (B) $\left(\frac{2}{3},0\right)$ (C) $\left(\frac{9}{10},0\right)$ (D) $\left(\frac{2}{3},\sqrt{6}\right)$

Ans. A

Sol. Ellipse : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ ....(1)

foci of ellipse are $(\pm1, 0)$

Equation of parabola having vertex (0, 0) and focus (1, 0) is $y^2 = 4x$ ....(2)



from equation (1) & (2) $\frac{x^2}{9}+\frac{4x}{8}=1 \Rightarrow 2x^2+9x-18=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2},-6$ (rejected)

$\therefore M\left(\frac{3}{2},\sqrt{6}\right)$ and $N\left(\frac{3}{2},-\sqrt{6}\right)$

Equation of altitude from vertex $M\left(\frac{3}{2},\sqrt{6}\right)$ is $\left(y-\sqrt{6}\right)=\frac{5}{2\sqrt{6}}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

put y = 0 we get $\Rightarrow \frac{-12}{5}=x-\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{-9}{10}$

$\Rightarrow$ orthocener of $\Delta\, F_1$ MN is $\left(\frac{-9}{10},0\right)$

54. If the tangents to the ellipse at M and N meet at R and the normal to the parabola at M meets the x-axis at Q, then the ratio of area of the triangle MQR to area of the quadrilateral MF_1NF_2 is
यदि दीर्घवृत्त के बिन्दुओं M और N पर स्पर्श रेखाएँ (tangents) R पर मिलती हैं और परवलय के बिन्दु M पर अभिलम्ब x-अक्ष को Q पर मिलता है, तब त्रिभुज MQR के क्षेत्रफल और चतुर्भुज (quadrilateral) MF_1NF_2 के क्षेत्रफल का अनुपात (ratio) है

(A) 3 : 4 (B) 4 : 5 (C) 5 : 8 (D) 2 : 3

Ans. C

Sol. Equation of tangent at point $M\left(\frac{3}{2},\sqrt{6}\right)$ to the ellipse is $\frac{x(3/2)}{9}+\frac{y\sqrt{6}}{8}=1$

put y = 0 ⇒ R is (6, 0)

Equation of normal to the parabola at point $M\left(\frac{3}{2}, \sqrt{6}\right)$ is $\left(y-\sqrt{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

put $y = 0 \Rightarrow Q$ is $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

Now $\dfrac{\text{Area of } \Delta MQR}{\text{Area of quadrilateral } MF_1NF_2} = \dfrac{\frac{1}{2}.\frac{5}{2}.\sqrt{6}}{\frac{1}{2}.2.2\sqrt{6}} = \dfrac{5}{8}$