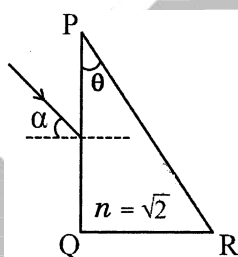


SECTION-I (Maximum Marks : 15)
SINGLE CORRECT ANSWER TYPE

- * This section contains Five Questions
- * The answer to each question is a Single Digit Integer ranging from 0 to 9, both inclusive.
- * For each question, darken the bubble corresponding to the correct integer in the ORS
- * Marking scheme :
+4 If the bubble corresponding to the answer is darkend
0 In all other cases.

1. A parallel beam of light is incident from air at an angle α on the side PQ of a right angled triangular prism of refractive index $n = \sqrt{2}$. Light undergoes total internal reflection in the prism at the face PR when α has a minimum value of 45° . The angle θ of the prism is -

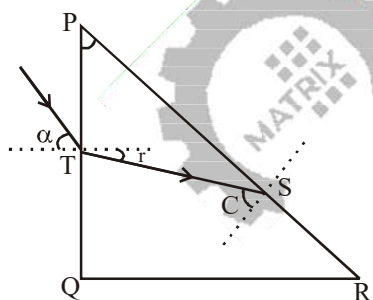
वायु से आती प्रकाश की एक समानान्तर किरण-पुंज (parallel beam) एक समकोण त्रिभुजीय प्रिज्म (right angled triangular prism), जिसका अपवर्तनांक $n = \sqrt{2}$ है, के PQ तल पर α कोण से आपतित होती है। जब α का न्यूनतम मान 45° है तो प्रकाश का प्रिज्म की PR सतह पर पूर्ण आंतरिक परावर्तन (total internal reflection) होता है। प्रिज्म का कोण θ क्या होगा?



- (A) 15° (B) 22.5° (C) 30° (D) 45°

Ans. A

Sol.



$$\sin c = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \text{critical angle} = 45^\circ$$

$$\text{At point T,} \quad \sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin r$$

$$r = 30^\circ$$

$$\Delta PTS, \text{ sum of all angles} = 180^\circ$$

$$\theta = 15^\circ$$

2. In a historical experiment to determine Planck's constant, a metal surface was irradiated with light of different wavelengths. The emitted photoelectron energies were measured by applying a stopping potential. The rel-

evant data for the wavelength (λ) of incident light and the corresponding stopping potential (V_0) are given below :

प्लांक स्थिरांक निकालने के लिए एक एतिहासिक प्रयोग में एक एतिहासिक प्रयोग में एक धातु की सतह को अलग-अलग तरंगदैर्घ्य के प्रकाश से प्रदीप्त किया गया। उत्सर्जित प्रकाशिक इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा को निरोधी विभव (stopping potential) लगाकर मापा गया। उपयोग में लाये गए आपतित प्रकाश की तरंगदैर्घ्य (λ) एवं संबन्धित निरोधी विभव (V_0) के आंकड़े नीचे दिए गए हैं :

λ (μm)	V_0 (Volt)
0.3	2.0
0.4	1.0
0.5	0.4

Given that $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ and $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, Planck's constant (in units of J s) found from such an experiment is -

प्रकाश की गति $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ तथा इलेक्ट्रॉन का आवेश $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ दिया गया है। इस प्रयोग से निकाले एक प्लांक स्थिरांक (Js मात्रक में) का मान है -

- (A) 6.0×10^{-34} (B) 6.4×10^{-34} (C) 6.6×10^{-34} (D) 6.8×10^{-34}

Ans. B

Sol. $\frac{hc}{0.3 \times 10^{-6}} - \phi = e \times 2 \dots(1)$

$\frac{hc}{0.4 \times 10^{-6}} - \phi = e \times 1 \dots(2)$

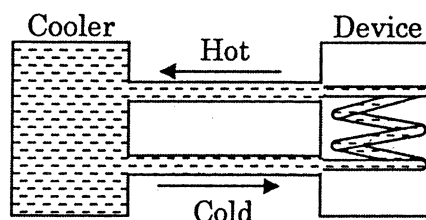
from equation (1) subtracted by equation (2)

eq(1) - eq(2)

$h = 6.4 \times 10^{-34}$

3. A water cooler of storage capacity 120 litres can cool water at a constant rate of P watts. In a closed circulation system (as shown schematically in the figure), the water from the cooler is used to cool an external device that generates constantly 3kW of heat (thermal load). The temperature of water fed into the device cannot exceed 30°C and the entire stored 120 litres of water is initially cooled to 10°C . The entire system is thermally insulated. The minimum value of P (in watts) for which the device can be operated for 3 hours is -

120 लिटर क्षमता वाला पानी का एक कूलर समान दर P watts से पानी को ठंडा कर सकता है। एक बंद परिसंचरण में (जैसा व्यवस्था चित्र में दर्शाया गया है) कूलर के पानी से एक बाहरी यंत्र को ठंडा किया जाता है जो हमेशा 3 kW ऊष्मा उत्पन्न करता है। यंत्र को दिया गया पानी का तापमान 30°C से ज्यादा नहीं हो सकता एवं पूरा 120 लिटर पानी प्रारम्भ में 10°C तक ठंडा किया गया है। पूरा निकाय तापरोधी है। इस यंत्र को तीन घंटे तक चालू रखने के लिए कम से कम कितनी शक्ति P (watts में) की जरूरत है?



(Specific heat of water is $4.2 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ and the density of water is 1000 kg m^{-3})

(पानी की विशिष्ट ऊष्मा = $4.2 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ और पानी का घनत्व = 1000 kg m^{-3})

- (A) 1600 (B) 2067 (C) 2533 (D) 3933

Ans. B

Sol. $(P_{in} - P_{out}) \times t = ms\Delta T$

$$(3000 - P) \times 3 \times 60 \times 60 = 120 \times 4200 \times 20$$

$$P = 2067 \text{ Watt}$$

4. A uniform wooden stick of mass 1.6 kg and length l rests in an inclined manner on a smooth, vertical wall of height $h (< l)$ such that a small portion of the stick extends beyond the wall. The reaction force of the wall and the bottom of the stick is on a rough floor. The reaction of the wall on the stick is equal in magnitude to the reaction of the floor on the stick. The ratio h/l and the frictional force f at the bottom of the stick are ($g = 10 \text{ ms}^{-2}$)

1.6 kg द्रव्यमान और l लम्बाई की एकसमान लकड़ी की एक डंडी एक चिकनी खड़ी दीवार, जिसकी ऊंचाई $h (< l)$ है, पर आनत तरीके से इस तरह से रखी गयी है कि डंडी का एक छोटा सा भाग दीवार से ऊपर निकला हुआ है। डंडी पर दीवार का प्रतिक्रिया बल डंडी पर प्रतिक्रिया तथा जमीन से डंडी पर प्रतिक्रिया की मात्रा समान है। h/l का अनुपात एवं डंडी के आधार पर घर्षण बल f है - ($g = 10 \text{ ms}^{-2}$)

(A) $\frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ N}$

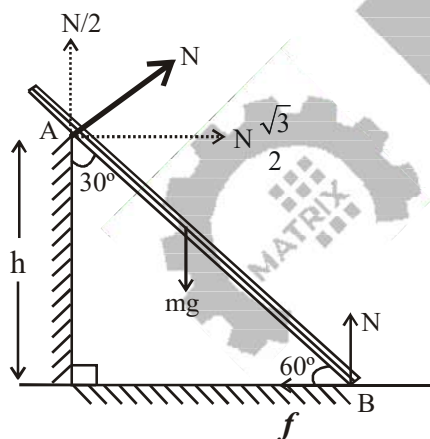
(B) $\frac{h}{l} = \frac{3}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ N}$

(C) $\frac{h}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, f = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ N}$

(D) $\frac{h}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ N}$

Ans. D

Sol.



$$\frac{N}{2} + N = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2}{3} mg$$

$$N \frac{\sqrt{3}}{2} = f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{mg}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$\sum \tau_B = 0$$

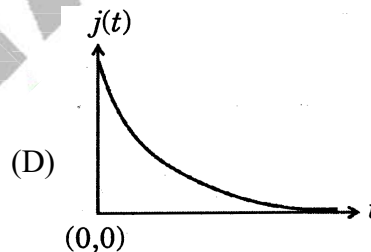
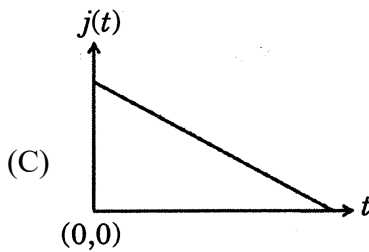
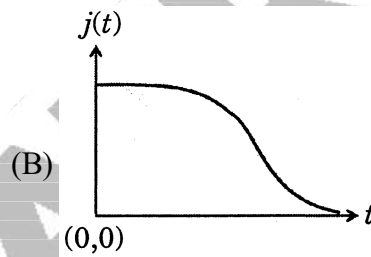
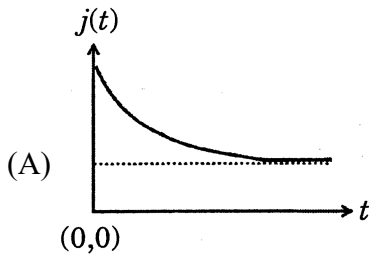
$$N \times \frac{h}{\cos 30^\circ} = mg \times \frac{L}{2} \cos 60^\circ$$

$$\frac{2}{3} mg \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} = mg \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{h}{L} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

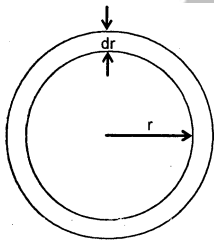
5. An infinite line charge of uniform electric charge density λ lies along the axis of an electrically conducting infinite cylindrical shell of radius R . At time $t = 0$, the space inside the cylinder is filled with a material of permittivity ϵ and electrical conductivity σ . The electrical conduction in the material follows Ohm's law. Which one of the following graphs best describes the subsequent variation of the magnitude of current density $j(t)$ at any point in the material?

एक बेलनाकार अनंत विद्युतचालक कवच की त्रिज्या R है। बेलन के अक्ष पर एक अनंत रेखीय विद्युत आवेश स्थित है जिसका एकसमान रेखीय घनत्व λ है। बेलन के अंदर की जगह को समय $t = 0$ पर एक पदार्थ से भरा जाता है, जिसका पराविद्युतांक ϵ एवं विद्युतचालकता σ है। पदार्थ में विद्युत आवेश की चालकता ओम् के नियम (Ohm's law) का पालन करती है। परवर्ती समय में पदार्थ में किसी भी बिन्दु पर विद्युत धारा घनत्व $j(t)$ के परिमाण में परिवर्तन का सबसे अच्छा वर्णन कौनसा लेखाचित्र करता है?



Ans. D

Sol.



For infinite line,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

$$\Rightarrow dV = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon r} dr$$

Current through an elemental shell;

$$I = \frac{|dV|}{dR} = \frac{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} dr}{\frac{1}{\sigma} \times \frac{dr}{2\pi r l}} = \frac{\lambda\sigma l}{\epsilon}$$

This current is radially outwards so;

$$\frac{d}{dt}(\lambda l) = \frac{-\lambda\sigma l}{\epsilon} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right) dt$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t}$$

$$\text{So, } j = \frac{I}{2\pi r l} = \frac{\lambda\sigma}{2\pi\epsilon r} = \left(\frac{\lambda_0\sigma}{2\pi\epsilon r}\right) e^{-(\sigma/\epsilon)t}$$

SECTION-II (Maximum Marks : 32)

MULTIPLE CORRECT ANSWER TYPE

6. A plano-convex lens is made of a material of refractive index n . When a small object is placed 30cm away in front of the curved surface of the lens, an image of double the size of the object is produced. Due to reflection from the convex surface of the lens, another faint image is observed at a distance of 10cm away from the lens. Which of the following statement(s) is(are) true?

- (A) The refractive index of the lens is 2.5 (B) The radius of curvature of the convex surface is 45cm
(C) The faint image is erect and real (D) The focal length of the lens is 20cm

एक समतल-उत्तल लेंस के पदार्थ का अपवर्तनांक n है। जब एक छोटी वस्तु को लेंस के वक्रप्रष्ठ के सामने 30cm की दूरी पर रखते हैं तो उस वस्तु की दुगुनी साइज का प्रतिबिम्ब बनता है। उत्तल प्रष्ठ से परवर्तन के कारण लेंस से 10cm की दूरी पर एक क्षीण प्रतिबिम्ब भी बनता है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A) लेंस का अपवर्तनांक 2.5 है (B) उत्तल प्रष्ठ की वक्रता त्रिज्या 45cm है
(C) क्षीण प्रतिबिम्ब वास्तविक एवं सीधा है (D) लेंस की फोकस दूरी 20cm है

Ans. AD

Sol. (i) For reflection from convex surface,

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

Put, $v = 10$ cm, $u = -30$ cm

$\Rightarrow f = 15$ cm and $R = 30$ cm for convex surface

(ii) for refraction through lens,

$$m = \frac{v}{u}$$

$$-2 = \frac{v}{(-30)}$$

$v = 60$ cm

(iii) Apply lens formula,

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

put, $u = -30$ cm, $v = 60$ cm

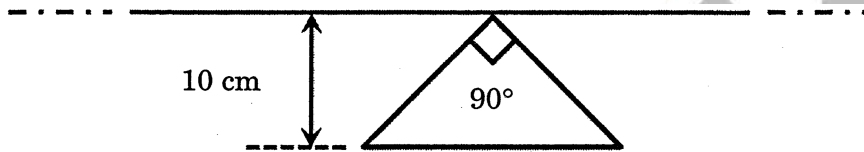
$$\Rightarrow f = 20 \text{ cm}$$

(iv) Apply lens makers formula

$$\frac{1}{20} = (\mu - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{\infty} \right) \quad \{R_1 = 30 \text{ cm}\}$$

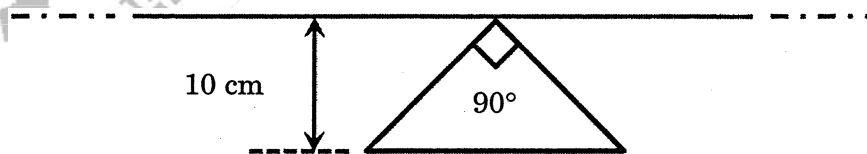
$$\mu = 2.5$$

7. A conducting loop in the shape of a right angled isosceles triangle of height 10cm is kept such that the 90° vertex is very close to an infinity long conducting wire (see the figure). The wire is electrically insulated from the loop. The hypotenuse of the triangle is parallel to the wire. The current in the triangular loop is in counterclockwise direction and increased at a constant rate of 10 As^{-1} . Which of the following statement(s) is(are) true?



- (A) There is a repulsive force between the wire and the loop
- (B) If the loop is rotated at a constant angular speed about the wire, an additional emf of $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$ volt is induced in the wire
- (C) The magnitude of induced emf in the wire is $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$ volt
- (D) The induced current in the wire is in opposite direction to the current along the hypotenuse

एक समकोणीय त्रिकोण चालकीय फंदे की ऊंचाई 10cm है एवं इसकी दो भुजाएं समान है। इस फंदे का समकोणीय बिन्दु एक अनंत लम्बाई के चालकीय तार के बहुत नजदीक इस तरह से रखा गया है कि त्रिकोण का कर्ण चालकीय तार के समानान्तर है (जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है)। तार तथा फंदा एक दूसरे से विद्युत्रोधी है। त्रिकोणीय फंदे में धारा वामावर्त् दिशा में एक समान दर 10 As^{-1} से बढ़ती है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?



- (A) फंदे एवं तार के मध्य प्रतिकर्षी बल है
- (B) यदि फंदे को एकसमान कोणिय गति से तार के अक्ष पर घुमाया जाता है तब तार में $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$ volt परिमाण का अतिरिक्त emf प्रेरित होता है
- (C) तार में उत्पन्न emf का परिमाण $\left(\frac{\mu_0}{\pi}\right)$ volt है
- (D) तार में प्रेरित धारा कर्ण में धारा के विपरित दिशा में है

Ans. AC

Sol. From lenz's law,

Current in straight wire towards right to oppose to change in flux in loop.

Magnetic field at straight wire due to triangular loop is inside the plane of paper, So it is repelled.

If current in straight wire is i

flux in loop $\phi = Mi$

$$\phi = \int_0^{0.10} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} (2x dx) = \frac{\mu_0}{\pi} \times 0.1 \times i$$

$$M = \frac{\mu_0 \times 0.1}{\pi}$$

$$\text{emf in wire} = M \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 \times 0.1}{\pi} \times 10 = \frac{\mu_0}{\pi}$$

8. The position vector \vec{r} of a particle of mass m is given by the following equation

$$\vec{r}(t) = \alpha t^3 \hat{i} + \beta t^2 \hat{j},$$

where $\alpha = 10/3 \text{ ms}^{-3}$, $\beta = 5 \text{ ms}^{-2}$ and $m = 0.1 \text{ kg}$. At $t = 1 \text{ s}$, which of the following statement(s) is(are) true about the particle?

- (A) The velocity $\vec{v} = (10\hat{i} + 10\hat{j}) \text{ ms}^{-1}$
 (B) The angular momentum \vec{L} with respect to the origin is given by $\vec{L} = -(5/3)\hat{k} \text{ N ms}$
 (C) The force $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j}) \text{ N}$
 (D) The torque $\vec{\tau}$ with respect to the origin is given by $\vec{\tau} = -(20/3)\hat{k} \text{ N ms}$

m द्रव्यमान के एक कण की स्थिति-सदिश \vec{r} नीचे समीकरण में दिया गया है

$$\vec{r}(t) = \alpha t^3 \hat{i} + \beta t^2 \hat{j},$$

जिसमें $\alpha = 10/3 \text{ ms}^{-3}$, $\beta = 5 \text{ ms}^{-2}$ एवं $m = 0.1 \text{ kg}$ है। समय $t = 1 \text{ s}$ पर, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A) वेग का मान $\vec{v} = (10\hat{i} + 10\hat{j}) \text{ ms}^{-1}$ है
 (B) मूल बिन्दु के गिर्द कोणीय संवेग का मान $\vec{L} = -(5/3)\hat{k} \text{ N ms}$ है
 (C) बल का मान $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j}) \text{ N}$ है
 (D) मूल बिन्दु के गिर्द घूर्ण का मान $\vec{\tau} = -(20/3)\hat{k} \text{ N ms}$ है

Ans. ABD

Sol. $\vec{r} = \frac{10}{3} t^3 \hat{i} + 5t^2 \hat{j}$

$$\vec{v} = 10t^2 \hat{i} + 10t \hat{j}$$

$$\vec{a} = 20t \hat{i} + 10 \hat{j}$$

At $t = 1 \text{ sec}$

$$\vec{r} = \frac{10}{3} \hat{i} + 5 \hat{j}$$

(A) $\vec{v} = 10\hat{i} + 10\hat{j}$

$$\vec{a} = 20\hat{i} + 10\hat{j}$$

(B) $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{5}{3}\hat{k}$

(C) $\vec{F} = m\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j}$

(D) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = -\frac{20}{3}\hat{k}$

9. A length-scale (l) depends on the permittivity (ϵ) of a dielectric material, Boltzmann constant (k_B), the absolute temperature (T), the number per unit volume (n) of certain charged particles and the charge (q) carried by each of the particles. Which of the following expression(s) for l is(are) dimensionally correct?

एक लंबाई माप (l) की निर्भरता, पराविद्युत पदार्थ के पराविद्युतांक (ϵ), बोल्जमान स्थिरांक (Boltzmann constant) (k_B), परम ताप (T), एक आयतन में कुछ आवेशित कणों की संख्या (n) (संख्या-घनत्व) तथा हर एक कण के आवेश (q) पर होती है। l के लिए निम्नलिखित में से सही विभीयता वाला कौनसा/कौनसे सूत्र है/हैं?

(A) $l = \sqrt{\left(\frac{nq^2}{\epsilon k_B T}\right)}$ (B) $l = \sqrt{\left(\frac{\epsilon k_B T}{nq^2}\right)}$ (C) $l = \sqrt{\left(\frac{q^2}{\epsilon n^{2/3} k_B T}\right)}$ (D) $l = \sqrt{\left(\frac{q^2}{\epsilon n^{1/3} k_B T}\right)}$

Ans. BD

Sol. We know,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \quad \Rightarrow \frac{q^2}{\epsilon_0} = (Fr^2) 4\pi$$

So, dimension

$$\frac{q^2}{\epsilon_0} = \dim(Fr^2) = MLT^{-2} \times L^2 = ML^3T^{-2}$$

$$\text{Similarly; } E = \frac{3}{2} K_B T \Rightarrow \dim(K_B T) = \dim(\text{Energy}) = ML^2T^{-2}$$

(A) $\sqrt{\frac{nq^2}{\epsilon k_B T}} = \sqrt{\frac{L^{-3} \times ML^3T^{-2}}{ML^2T^{-2}}} = \frac{1}{L}$

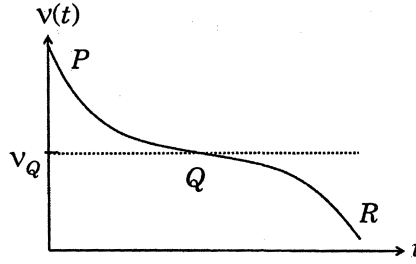
(B) $\sqrt{\frac{(E) \times \text{vol}}{Fr^2}} = \sqrt{\frac{ML^2T^{-2} \times L^3}{MLT^{-2} \times L^2}} = L$

(C) $\sqrt{\frac{Fr^2 (\text{vol})^{2/3}}{(K\epsilon)}} = \sqrt{\frac{MLT^{-2} \times L^2 \times L^2}{ML^2T^{-2}}} = \sqrt{L^3} = L^{3/2}$

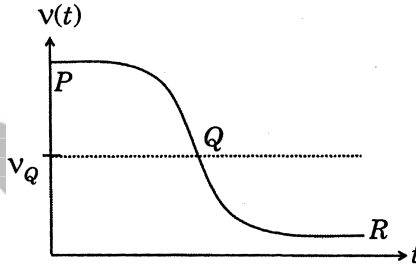
(D) $\sqrt{\frac{Fr^2 (\text{vol})^{1/3}}{\text{Energy}}} = \sqrt{\frac{MLT^{-2}L^2 \times L}{ML^2T^{-2}}} = L$

$$[\therefore \text{dimension } n = \dim\left(\frac{1}{\text{vol}}\right) = L^{-3}]$$

10. Two loudspeakers M and N are located 20m apart and emit sound at frequencies 118 Hz and 121 Hz, respectively. A car is initially at a point P, 1800 m away from the midpoint Q of the line MN and moves towards Q constantly at 60 km/hr along the perpendicular bisector of MN. It crosses Q and eventually reaches a point R, 1800 m away from Q. Let $v(t)$ represent the beat frequency measured by a person sitting in the car at time t . Let v_P, v_Q, v_R be the beat frequencies measured at locations P, Q and R, respectively. The speed of sound in air is 330 ms^{-1} . Which of the following statement(s) is(are) true regarding the sound heard by the person?
- (A) The plot below represents schematically the variation of beat frequency with time

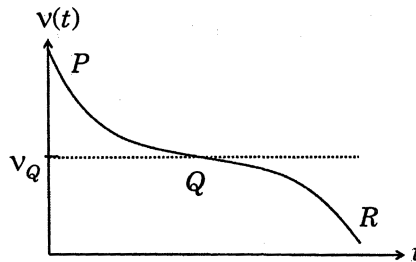


- (B) The rate of change in beat frequency is maximum when the car passes through Q
 (C) $v_P + v_R = 2v_Q$
 (D) The plot below represents schematically the variation of beat frequency with time

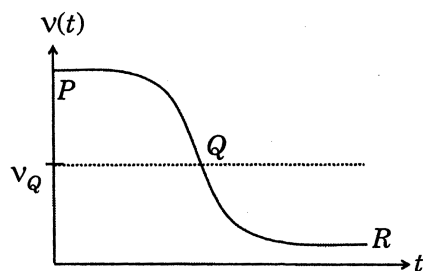


दो लाउडस्पीकर M एवं N जो कि एक दूसरे से 20 m की दूरी पर है, क्रमशः 118 Hz एवं 121 Hz की ध्वनि उत्सर्जित करते हैं। बिन्दु P रेखा MN के द्विविभाजक लंब पर स्थित है तथा MN के मध्य बिन्दु Q से 1800 m की दूरी पर है। एक कार बिन्दु P से बिन्दु Q की तरफ 60 km/hr की स्थित गति से चलना प्रारम्भ करती है। कार Q बिन्दु को पार कर अंतोगत्वा बिन्दु R के आगे चली जाती है, जहां बिन्दु R बिन्दु Q से 1800 m की दूरी पर है। कार में बैठा व्यक्ति समय t पर विस्पंद-आवृत्ती (beat frequency) $v(t)$ मापता है। P, Q, R पर विस्पंद-आवृत्ती क्रमशः v_P, v_Q, v_R है। ध्वनि की हवा में गति 330 ms^{-1} है। कार में बैठे व्यक्ति द्वारा सुनी गयी ध्वनि के बारे में निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A) नीचे दिखाया गया लेखाचित्र-आवृत्ति का समय के साथ रिवर्तन की व्यवस्था को दर्शाता है

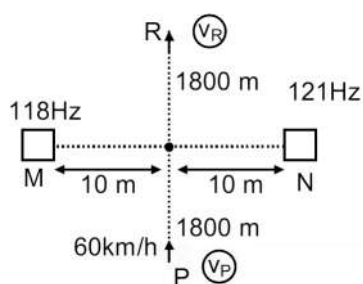


- (B) जब कार Q बिन्दु को पार करती है तो विस्पंद-आवृत्ती की दर में अधिकतम परिवर्तन होता है
 (C) $v_P + v_R = 2v_Q$
 (D) नीचे दिखाया गया लेखाचित्र विस्पंद-आवृत्ती का समय के साथ परिवर्तन की व्यवस्था को दर्शाता है



Ans. BCD

Sol.



Apparent freq. of M and N at P

$$f'_m = \left(\frac{v + v_0}{v} \right) f_m$$

$$f'_m = \left(\frac{330 + \frac{50}{3}}{330} \right) 118 = \left(\frac{990 + 50}{990} \right) 118$$

$$f'_N = \left(\frac{v + v_0}{v} \right) f_N = \left(\frac{990 + 50}{990} \right) 121$$

$$\Rightarrow \text{Beat frequency } v_p = f'_N - f'_m$$

$$= \frac{990 + 50}{990} [121 - 118]$$

$$= \frac{1040}{990} \times 3$$

App. frequency of M, N at R

$$f''_m = \left(\frac{v - v_0}{v} \right) f_m$$

$$f''_m = \left(\frac{330 - \frac{50}{3}}{330} \right) 118 = \left(\frac{990 - 50}{990} \right) 118 \text{ Hz}$$

$$f''_N = \left(\frac{990 - 50}{990} \right) 121 \text{ Hz}$$

Beat frequency $v_R = f''_N = f''_M$

$$v_R = \left(\frac{990 - 50}{990} \right) (121 - 118) \text{ Hz}$$

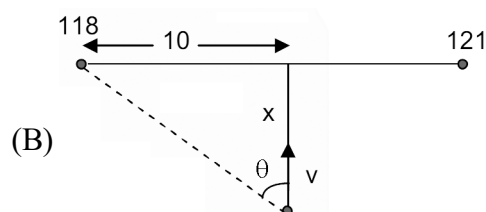
$$= \left(\frac{940}{990} \right) (3) \text{ Hz}$$

Beat frequency at Q

$$v_Q = 121 - 118 = 3 \text{ Hz}$$

(A) $v_p + v_R = 2v_Q$

$$\left(\frac{1040}{990} \times 3 \right) + \left(\frac{940}{990} \times 3 \right) = 2 \times 3$$



$$v = \left(\frac{330 + v \cos \theta}{330} \right) 3$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{110} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\tan \theta = \frac{10}{x}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{10}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

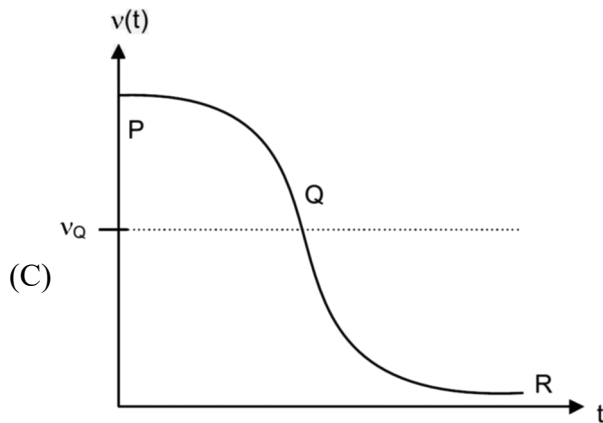
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{10v}{x^2 \sec^2 \theta}$$

$$x = 10 \cot \theta$$

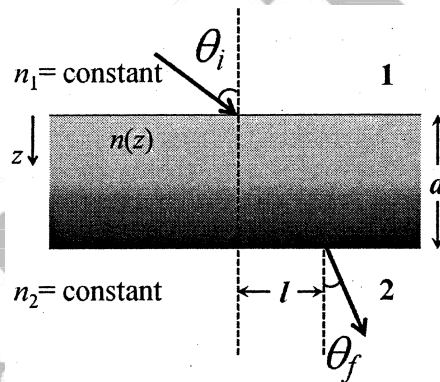
$$\frac{dv}{dt} = \left(-\frac{v}{110} \right) \sin \theta \left(\frac{10v}{x^2 \sec^2 \theta} \right)$$

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| \propto \sin^3 \theta$$

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| \text{ is maximum at Q}$$



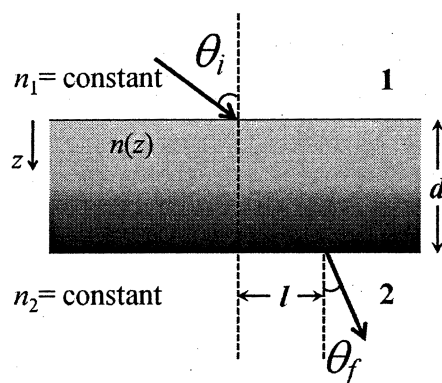
11. A transparent slab of thickness d has a refractive index $n(z)$ that increases with z . Here z is the vertical distance inside the slab, measured from the top. The slab is placed between two media with uniform refractive indices n_1 and $n_2 (> n_1)$, as shown in the figure. A ray of light is incident with angle θ_i from medium 1 and emerges in medium 2 with refraction angle θ_f with a lateral displacement l .



Which of the following statement(s) is(are) true?

- (A) l is dependent on $n(z)$ (B) $n_1 \sin \theta_i = (n_2 - n_1) \sin \theta_f$
 (C) $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_f$ (D) l is independent of n_2

'd' मोटाई के एक पारदर्शी पट्ट का अपवर्तनांक $n(z)$ का मान z बढ़ाने से बढ़ता है। यहाँ z पट्ट के अंदर ऊपरी सतह से मापी गयी ऊर्ध्वाधर दूरी है। पट्ट को दो माध्यमों के बीच रखा गया है जिनके एकसमान (uniform) अपवर्तनांक n_1 एवं $n_2 (> n_1)$ है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। यहाँ n_1 और n_2 स्थिर (lateral displacement) l से अपवर्तन कोण θ_f पर निकसित होती है।



निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A) l का मान $n(z)$ पर निर्भर करता है
 (B) $n_1 \sin \theta_i = (n_2 - n_1) \sin \theta_f$
 (C) $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_f$
 (D) l का मान n_2 पर निर्भर नहीं करता है

Ans. ACD

Sol. For parallel slab

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_f$$

And l depends on refractive angle in slab

$\therefore l$ depends on refractive index of slab and independent of n_2 .

12. Highly excited states for hydrogen-like atoms (also called Rydberg states) with nuclear charge Ze are defined by their principal quantum number n , where $n \gg 1$. Which of the following statement(s) is(are) true?

- (A) Relative change in the radii of two consecutive orbitals does not depend on Z .
 (B) Relative change in the radii of two consecutive orbitals varies as $1/n$.
 (C) Relative change in the energy of two consecutive orbitals varies as $1/n^3$.
 (D) Relative change in the angular momenta of two consecutive orbitals varies as $1/n$.

Ze नाभिकीय आवेश के हाइड्रोजन की तरह के परमाणु की अत्यधिक उत्तेजित अवस्था (जिसे रिड्बर्ग अवस्था भी कहते हैं) को उसके मुख्य क्वांटम अंक n ($n \gg 1$) से परिभाषित किया जाता है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A) दो क्रमागत कक्षों की त्रिज्या का आपेक्षित अंतर (relative change) Z के ऊपर निर्भर नहीं करता है
 (B) दो क्रमागत कक्षों की त्रिज्या का आपेक्षित अंतर $1/n$ के समानुपात होता है
 (C) दो क्रमागत कक्षों की ऊर्जा का आपेक्षित अंतर $1/n^3$ के समानुपात होता है
 (D) दो क्रमागत कक्षों के कोणिय संवेग का आपेक्षित अंतर $1/n$ के समानुपात होता है

Ans. ABD

Sol. $r = r_0 \left(\frac{n^2}{Z} \right); \frac{\Delta r}{r} = \left(\frac{2\Delta n}{n} \right)$

$$\Delta n = 1 \text{ so } \frac{\Delta r}{r} \propto \frac{1}{n}$$

$$L = \frac{nh}{2\pi}; \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta n}{n}; \quad \frac{\Delta L}{L} \propto \frac{1}{n}$$

13. An incandescent bulb has a thin filament of tungsten that is heated to high temperature by passing an electric current. The hot filament emits black-body radiation. The filament is observed to break up at random locations after a sufficiently long time of operation due to non-uniform evaporation of tungsten from the filament. If the bulb



is powered at constant voltage, which of the following statement(s) is(are) true?

- (A) The temperature distribution over the filament is uniform
- (B) The resistance over small sections of the filament decreases with time
- (C) The filament emits more light at higher band of frequencies before it breaks up
- (D) The filament consumes less electrical power towards the end of the life of the bulb

एक तापदीप्त बल्ब के टंग्स्टन तन्तु को विद्युत धारा के उच्च तापमान पर गरम करने पर टंग्स्टन तन्तु कृष्णिका विकिरण (black-body radiation) उत्सर्जित करता है। यह देखा गया है कि लंबे समय के प्रयोग के बाद टंग्स्टन तन्तु में असमान वाष्पीकरण के कारण तन्तु किसी भी जगह से टूट जाता है। यदि बल्ब को विद्युत शक्ति एक स्थिर वोल्टता पर दी गयी है तो निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A) तन्तु पर तापमान का वितरण एक समान है
- (B) तन्तु के छोटे भागों का प्रतिरोध समय के साथ कम होता जाता है
- (C) टूटने से पहले तन्तु उच्च आवृत्ती पट्टी (high frequency band) का प्रकाश पहले से ज्यादा उत्सर्जित करता है
- (D) तन्तु अपनी आयु के आखरी समय में कम विद्युत शक्ति का प्रयोग करता है

Ans. CD

Sol. Because of non-uniform evaporation at different section, area of cross-section would be different at different sections.

Region of highest evaporation rate would have rapidly reduced area and would become break up cross section.

Resistance of the wire as whole increases with time.

Overall resistance increases hence power decreases. At break up junction temperature would be highest, thus light of highest band frequency would be emitted at those cross-section.

SECTION-III (Maximum Marks : 15)

SINGLE DIGIT ANSWER TYPE

14. A hydrogen atom in its ground state is irradiated by light of wavelength 970\AA . Taking $hc/e = 1.237 \times 10^{-6} \text{ eV m}$ and the ground state energy of hydrogen atom as -13.6 eV , the number of lines present in the emission spectrum is -

एक हाइड्रोजन परमाणु को उसकी निम्नतम अवस्था में 970\AA तरंगदैर्घ्य वाले प्रकाश से प्रदीप्त किया जाता है। यहाँ पर $hc/e = 1.237 \times 10^{-6} \text{ eV m}$ तथा हाइड्रोजन परमाणु की न्यूनतम अवस्था की ऊर्जा -13.6 eV है। उत्सर्जित मानावली (emission spectrum) में रेखाओं की संख्या क्या होगी?

Ans. 6

Sol. $\lambda = 970\text{\AA}$

$$E = \frac{12400}{970} = 12.783$$

It will excite the electron to $n = 4$

$${}^4c_2 = 6$$

15. The isotope ${}^{12}_5\text{B}$ having a mass 12.014 u undergoes β -decay to ${}^{12}_6\text{C}$. ${}^{12}_6\text{C}$ has an excited state of the nucleus (${}^{12}_6\text{C}^*$) at 4.041 MeV above its ground state. If ${}^{12}_5\text{B}$ decays to ${}^{12}_6\text{C}^*$, the maximum kinetic energy of the β -particle in units of MeV is -

($1 \text{ u} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$, where c is the speed of light in vacuum.)

समस्थानिक (isotope) ${}^{12}_5\text{B}$ जिसका द्रव्यमान 12.014 u है, बीटा क्षय (β -decay) की प्रक्रिया से ${}^{12}_6\text{C}$ में परिवर्तित हो जाता

है। $^{12}_6\text{C}$ की एक नाभिकीय उत्तेजित अवस्था ($^{12}_6\text{C}^*$) निम्नतम अवस्था से 4.041 MeV ऊपर होती है। अगर $^{12}_6\text{C}^*$ में परिवर्तित होता है तो बीटा कण की अधिकतम गतिक ऊर्जा (MeV की मात्रा में) क्या होगी?
 (1 u = 931.5 MeV/c², यहाँ c निर्वात में प्रकाश की गति है)

Ans. 9

Sol. $KE_{\max} = (12.014 - 12.0) \times 4 - 4.041$
 $= 0.014 \times 931.5 - 4.041$
 $= 9$

16. Consider two solid spheres P and Q each of density 8 gm cm⁻³ and diameters 1 cm and 0.5 cm, respectively. Sphere P is dropped into a liquid of density 0.8 gm cm⁻³ and viscosity $\eta = 3$ poiseulles. Sphere Q is dropped into a liquid of density 1.6 gm cm⁻³ and viscosity $\eta = 2$ poiseulles. The ratio of the terminal velocities of P and Q is -

8 gm cm⁻³ घनत्व वाले दो ठोस गोलों P तथा Q का व्यास क्रमशः 1 cm एवं 0.5 cm है। गोलों P को 0.8 gm cm⁻³ घनत्व एवं $\eta = 3$ poiseulles श्यानत्व (viscosity) वाले एक तरल में गिराया जाता है और गोलों Q को 1.6 gm cm⁻³ घनत्व एवं $\eta = 2$ poiseulles श्यानत्व (viscosity) वाले दूसरे तरल में गिराया जाता है। गोलों P एवं Q के अंतिम वेगों का अनुपात क्या होगा?

Ans. 3

Sol. $6\pi\eta r v + \rho_L V g = \rho_0 V g$

$$\frac{V_P}{V_Q} = \frac{(\rho_P V_P - \rho_L V_P) g}{6\pi\eta_P r_P} \times \frac{6\pi\eta_Q r_Q}{(\rho_Q V_Q - \rho_L V_Q)}$$

$$= \frac{r_P^3 (8 - 0.8)}{\eta_P \cdot r_P (8 - 1.6)} \times \frac{r_Q \cdot \eta_Q}{r_Q^3}$$

$$= \left(\frac{r_P}{r_Q}\right)^2 \times \left(\frac{\eta_Q}{\eta_P}\right) \times \left(\frac{7.2}{6.4}\right)$$

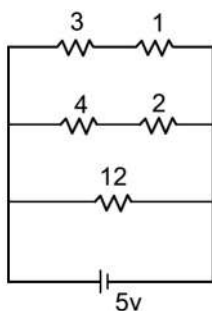
$$= 4 \times \frac{7.2}{6.4} \times \frac{2}{3} = 3$$

17. Two inductors L_1 (inductance 1 mH, internal resistance 3Ω) and L_2 (inductance 2 mH, internal resistance 4Ω) and a resistor R (resistance 12Ω) are all connected in parallel across a 5V battery. The circuit is switched on at time $t = 0$. The ratio of the maximum to the minimum current (I_{\max}/I_{\min}) drawn from the battery is -

दो प्रेरकों (Inductors) L_1 तथा L_2 का प्रेरकत्व क्रमशः 1 mH एवं 2 mH हैं, एवं आंतरिक प्रतिरोध क्रमशः 3Ω एवं 4Ω है। इन दोनों प्रेरकों तथा एक प्रतिरोधक R, जिसका प्रतिरोध 12Ω है, सभी को एक 5V की बैट्री से समानान्तर में जोड़ दिया गया है। परिपथ को समय $t = 0$ पर चालू किया जाता है। बैट्री से निकली अधिकतम एवं न्यूनतम धाराओं का अनुपात (I_{\max}/I_{\min}) क्या होगा?

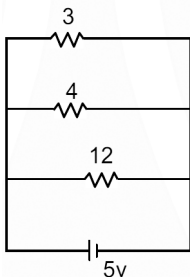
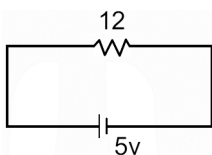
Ans. 8

Sol.



$$i_{\min} = \frac{5}{12} \quad \text{at } t = 0^+$$

$$i_{\max} = \frac{5 \times 8}{12} \quad \text{at } t = \infty$$



$$\frac{i_{\max}}{i_{\min}} = \frac{5 \times 8 \times 12}{12 \times 5} = 8$$

18. A metal is heated in a furnace where a sensor is kept above the metal surface to read the power radiated (P) by the metal. The sensor has a scale that displays $\log_2(P/P_0)$, where P_0 is a constant. When the metal surface is at a temperature of 487°C , the sensor shows a value 1. Assume that the emissivity of the metallic surface remains constant. What is the value displayed by the sensor when the temperature of the metal surface is raised to 2767°C ?

एक धातु को भट्टी में गरम करते हुए उसकी विकिरण शक्ति (P) को धातु के ऊपर रखे हुए एक संवेदक (sensor) से पढ़ते हैं। संवेदक का पैमाना $\log_2(P/P_0)$ को पढ़ता है, यहाँ P_0 एक स्थिरांक है। जब धातु का तापमान 487°C है तो संवेदक का पठन 1 है। मान लीजिये कि धातु की उत्सर्जिकता स्थिर है। धातु की सतह का तापमान 2767°C तक बढ़ाने पर संवेदक का पठन क्या होगा?

Ans. 9

Sol. Power radiated $P = e\sigma AT^4$

$$\text{At } 487^\circ\text{C}; P_1 = e\sigma A(760)^4 \quad \dots(i)$$



$$\text{Given, } \log_2 \frac{P_1}{P_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{P_1}{2}$$

$$\text{At } 2767^\circ\text{C; } P_2 = e\sigma A(3040)^4$$

$$\therefore \text{ Reading} = \log_2 \frac{P_2}{P_0} = \log_2 \left[\frac{e\sigma A(3040)^4 \times 2}{e\sigma A(760)^4} \right] = \log_2 (4^4 \times 2) = 9$$

