SECTION-III

[SINGLE CORRECT CHOICE TYPE]

Q.1 to Q.5 has four choices (A), (B), (C), (D) out of which ONLY ONE is correct.

37. A computer producing factory has only two plants T_1 and T_2. Plants T_1 produces 20% and plant T_2 produces 80% of the total computers produced. 7% of computers produced in the factory turn out to be defective. It is known that

P (computer turns out to be defective given that it is produced in plants T_1)

= 10 P (computer turns out to be defective given that it is produced in plants T_2)

where P(E) denotes the probability of an event E. A computer produced in the factory is randomly selected and it does not turn out to be defective. Then the probability that it is produced in plant T_2 is

एक संगणक निर्माण करने वाले कारखाने में केवल दो संयंत्र T_1 और T_2 हैं। कुल निर्मित संगणकों का 20% संयंत्र T_1 और 80% संयंत्र T_2 निर्माण करते है। कारखाने में निर्मित 7% संगणक खराब निकालते हैं। यदि ज्ञात है कि

P (संगणक खराब निकलता है यदि यह दिया गया है कि संगणक संयंत्र T_2 में निर्मित है)

= 10 P (संगणक खराब निकलता है यदि यह दिया गया है कि संगणक संयंत्र T_2 में निर्मित है)

जहाँ P(E) एक घटना E की प्रायिकता दर्शाता है। कारखाने में निर्मित एक संगणक यादृच्छया चुना जाता है और वह खराब नहीं निकलता है। तब उसके संयंत्र T_2 में निर्मित होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{36}{73}$ (B) $\frac{47}{79}$ (C) $\frac{78}{93}$ (D) $\frac{75}{83}$

Ans. C

Sol. Let $E_1 \equiv$ Computer produced in plant T_1

$E_2 \equiv$ Computer produced in plant T_2

$D \equiv$ Produced computer is defective

$$P(E_1)=\frac{20}{100},\quad P(E_2)=\frac{80}{100}$$

Consider $P\left(\frac{D}{E_2}\right)=x,\quad P\left(\frac{D}{E_1}\right)=10x$

$$P(D)=\frac{7}{100}\text{ (given)}$$

By Law of total probability

$$P(D)=P(E_1).P\left(\frac{D}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{D}{E_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{100}=\frac{20}{100}\times 10x+\frac{80}{100}\times x$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{40}$$

Hence, $P\left(\frac{D}{T_2}\right)=\frac{1}{40}\Rightarrow P\left(\frac{\bar{D}}{T_2}\right)=\frac{39}{40}$

$$P\left(\frac{D}{T_1}\right)=\frac{10}{40}\Rightarrow P\left(\frac{\bar{D}}{T_1}\right)=\frac{30}{40}$$

P(compouter is produced in plant T_2 given that it is not defective)

Or

$$P\left(\frac{T_2}{\bar{D}}\right)=\frac{\frac{80}{100}\times\frac{39}{40}}{\frac{20}{100}\times\frac{30}{40}+\frac{80}{100}\times\frac{39}{40}}=\frac{78}{93}$$

38. A debate club consists of 6 girls and 4 boys. A team of 4 members is to be selected from this club including the selection of a captain (from among these 4 members) for the team. If the team has to include at most one boy, then the number of ways of selecting the team is

एक वाद–विवाद समूह में 6 लड़कियाँ और 4 लड़के है। इस समूह में से एक चार सदस्यीय दल चुनना है जिसमें दल के एक कप्तान (उन्ही चार सदस्यों से) का चुनाव भी सम्मिलित है। यदि तल में अधिकतम एक लड़का सम्मिलित हो तब दल को चुनें जाने के तरीकों की संख्या है ।

(A) 380 (B) 320 (C) 260 (D) 95

Ans. A

Sol. No of ways = Either (0 boy and 4 girls) or (1 boys and 3 girls)

$= ({}^4C_0 \,.\, {}^6C_4) \,.\, {}^4C_1 + ({}^4C_1 \,.\, {}^6C_3) \,.\, {}^4C_1$

39. Let $-\frac{\pi}{6}<\theta<-\frac{\pi}{12}$. Suppose α_1 and β_1 are the roots of the equation $x^2 - 2x\sec\theta + 1 = 0$ and α_2 and β_2 are the roots of the equation $x^2 + 2x\tan\theta - 1 = 0$. If $\alpha_1 > \beta_1$ and $\alpha_2 > \beta_2$, then $\alpha_1 + \beta_2$ equals

माना कि $-\frac{\pi}{6}<\theta<-\frac{\pi}{12}$ है। मान लिजिये कि α_1 और β_1 समीकरण $x^2 - 2x\sec\theta + 1 = 0$ के मूल (roots) हैं और α_2 और β_2 समीकरण $x^2 + 2x\tan\theta - 1 = 0$ के मूल हैं। यदि $\alpha_1 > \beta_1$ और $\alpha_2 > \beta_2$ हैं, जब $\alpha_1 + \beta_2$ का मान है –

(A) $2(\sec\theta - \tan\theta)$ (B) $2\sec\theta$ (C) $-2\tan\theta$ (D) 0

Ans. C

Sol. Roots of the equation $x^2 - 2x\sec\theta + 1 = 0 \to \sec\theta - \tan\theta, \sec\theta + \tan\theta$

$\alpha_1 = \sec\theta - \tan\theta,\ \beta_1 = \sec\theta + \tan\theta\ (\because \alpha_1 > \beta_1)$

Roots of the equation $x^2 + 2x\tan\theta - 1 = 0 \to -\tan\theta + \sec\theta,, -\tan\theta - \sec\theta$

$\alpha_2 = \sec\theta - \tan\theta,\ \beta_2 = -\sec\theta - \tan\theta\ (\because \alpha_2 > \beta_2)$

Hence $\alpha_1 + \beta_2 = -2\tan\theta$

40. Let $S=\left\{x\in(-\pi,\pi): x\neq 0, \pm\frac{\pi}{2}\right\}$. The sum of all distinct solutions of the equation $\sqrt{3}\sec x + \operatorname{cosec} x + 2(\tan x - \cot x) = 0$ in the set S is equal to

माना कि $S=\left\{x\in(-\pi,\pi): x\neq 0, \pm\frac{\pi}{2}\right\}$ है। समुच्चय S में समीकरण $\sqrt{3}\sec x + \operatorname{cosec} x + 2(\tan x - \cot x) = 0$ के सभी भिन्न हलों का योग है –

(A) $-\frac{7\pi}{9}$ (B) $-\frac{2\pi}{9}$ (C) 0 (D) $\frac{5\pi}{9}$

Ans. C

Sol. $2\left(\frac{\sqrt{3}/2}{\cos x}+\frac{1/2}{\sin x}\right)+2(\tan x-\cot x)=0$

$2\frac{\cos(x-60°)}{\sin x\cos x}+\frac{2(-\cos 2x)}{\sin x\cos x}=0$

$\cos(x-60°)=\cos 2x$

$\Rightarrow x=2n\pi-\frac{\pi}{3},\ (6m+1)\frac{\pi}{9}\ (m, n\in I)$

Solutions belonging to set $S=-\frac{\pi}{3},-\frac{5\pi}{9},\frac{\pi}{9},\frac{7\pi}{9}$

sum $=0$

41. The least value of $\alpha\in\mathbb{R}$ for which $4\alpha x^2+\frac{1}{x}\geq 1$, for all $a>0$, is

यदि $\alpha\in\mathbb{R}$ और सभी $x>0$ है, तब $4\alpha x^2+\frac{1}{x}\geq 1$ के लिए α का न्यूनतम मान क्या होगा ?

(A) $\frac{1}{64}$ (B) $\frac{1}{32}$ (C) $\frac{1}{27}$ (D) $\frac{1}{25}$

Ans. C

Sol. $4\alpha x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geq 1$

By A.M. $\geq$ G.M.

$$\frac{4\alpha x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}}{3}\geq\left(4\alpha x^2.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$4\alpha x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geq 3(\alpha)^{\frac{1}{3}}$

For the least value of α

$3(\alpha)^{\frac{1}{3}}=1\Rightarrow\quad \alpha=\frac{1}{27}$

[MULTIPLE CORRECT CHOICE TYPE]

Q.6 to Q.11 has four choices (A), (B), (C), (D) out of which ONLY ONE is correct.

42. A solution curve of the differential equation $(x^2+xy+4x+2y+4)\frac{dy}{dx}-y^2=0, x>0$, passes through the point $(1,3)$. Then the solution curve

(A) intersects $y=x+2$ exactly at one point

(B) intersects $y = x + 2$ exactly at two points

(C) intersects $y = (x + 2)^2$

(D) does NOT intersect $y = (x + 3)^2$

माना कि अवकल समीकरण $(x^2 + xy + 4x + 2y + 4)\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 0, x > 0,$ का एक हल वक्र बिंदु $(1, 3)$ से गुजरता है। तब वह हल वक्र

(A) $y = x + 2$ को ठीक एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है।

(B) $y = x + 2$ को ठीक दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करता है।

(C) $y = (x + 2)^2$ को प्रतिच्छेदित करता है।

(D) $y = (x + 3)^2$ को प्रतिच्छेदित नहीं करता है।

Ans. AD

Sol. $\left[(x+2)^2 + y(x+2)\right]\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 0$

Put $x + 2 = t$

$\dfrac{dt}{dy} = \dfrac{t^2 + ty}{y^2}$ which is homogeneous differental equation

By solving it

$\ln y = \dfrac{-y}{x+2} + C$, $C = 1 + \ln 3$ since $y(1) = 3$

$\Rightarrow \ln\left(\dfrac{y}{3}\right) + \dfrac{y}{x+2} = 1$

Now : Verify the alternatives.

43. Consider a pyramid OPQRS located in the first octant $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ with O as origin, and OP and OR along the x-axis and the y-axis, respectively. The base OPQR of the pyramid is a square with $OP = 3$. The point S is directly above the mid-point T of diagonal OQ such that $TS = 3$. Then

(A) the acute angle between OQ and OS is $\dfrac{\pi}{3}$

(B) the equation of the plane containing the triangle OQS is $x - y = 0$

(C) the length of the perpendicular from P to the plane containing the triangle OQS = is $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

(D) the perpendicular distance from O to the straight line containing RS is $\sqrt{\dfrac{15}{2}}$

विचार कीजिये, एक सूच्याकार OPQRS जो प्रथम अष्टांशक $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ में स्थित है, जिसमें O मूल बिन्दु तथा OP और OR क्रमशः x- अक्ष और y-अक्ष पर हैं। इस सूच्याकार का आधार OPQR एक वर्ग है जिसमें $OP = 3$ है। बिन्दु S कर्ण OQ के मध्यबिन्दु T के ठीक ऊपर इस प्रकार है कि $TS = 3$ है। तब

(A) OQ और OS के बीच का न्यूनकोण $\dfrac{\pi}{3}$ है।

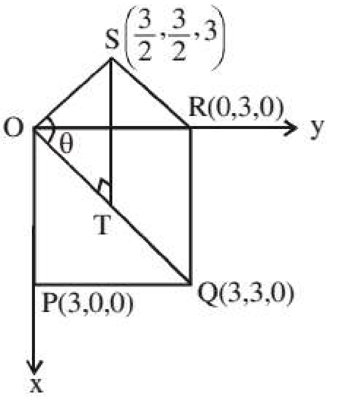
(B) त्रिभुज OQS को अंतर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण $x - y = 0$ है।

(C) P से त्रिभुज OQS को अंतर्विष्ट करने वाले समतल पर लम्ब की लंबाई $\frac{3}{\sqrt{2}}$ है।

(D) O से RS को अंतर्विष्ट करती हुई सरल रेखा की लम्बवत् दूरी $\sqrt{\frac{15}{2}}$ है।

Ans. BCD

Sol. Points O, P, Q, R, S are (0, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 3, 0) (0, 3, 0), $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$ respectively



Angle between OQ and OS is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Equation of plane containing the points O, Q and S is $x - y = 0$

Perpendicular distance from P(3, 0, 0) to the plane

$x - y = 0$ is $\left|\frac{3-0}{\sqrt{2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Perpendicular distance from O(0, 0, 0) to the line RS:

$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$ is $\sqrt{\frac{15}{2}}$

44. The circle $C_1 : x^2 + y^2 = 3$, with centre at O, intersects the parabola $x^2 = 2y$ at the point P in the first quadrant. Let the tangent to the circle C_1 at P touches other two circles C_2 and C_3 at R_2 and R_3, respectively. Suppose C_2 and C_3 have equal radii $2\sqrt{3}$ and centres Q_2 and Q_3, respectively. If Q_2 and Q_3 lie on the y-axis, then

(A) $Q_2Q_3 = 12$ (B) $R_2R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) area of the triangle OR_2R_3 is $6\sqrt{2}$ (D) area of thje triangle PQ_2Q_3 is $4\sqrt{2}$

वृत $C_1 : x^2 + y^2 = 3$ जिसका केन्द्रबिन्दु O है, परवलय $x^2 = 2y$ को प्रथम चमुर्थांश में बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित करता है। माना कि वृत C_1 के बिन्दु P पर खींची गई स्पर्शरेखा अन्य दो वृतों C_2 और C_3 को क्रमशः बिन्दुओं R_2 और R_3 पर स्पर्श करती हैं। मान लीजिये कि C_2 और C_3 दोनों की त्रिज्याएँ $2\sqrt{3}$ के बराबर हैं और उनके केन्द्रबिन्दु क्रमशः Q_2 और Q_3 है। यदि Q_2 और Q_3, y-अक्ष पर स्थित हैं, तब –

(A) $Q_2Q_3 = 12$ (B) $R_2R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) त्रिभुज OR_2R_3 का क्षेत्रफल $6\sqrt{2}$ है (D) त्रिभुज PQ_2Q_3 का क्षेत्रफल $4\sqrt{2}$ है

Ans. ABC

Sol. Equation of tangent at $P\left(\sqrt{2}, 1\right)$ is $\sqrt{2}x + y - 3 = 0$

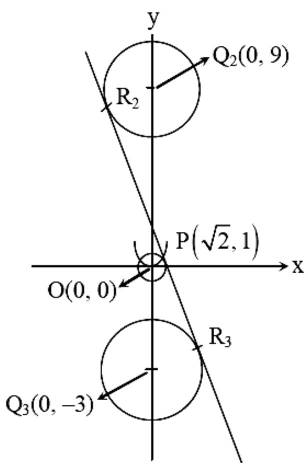
If centre of C_2 at $(0, \alpha)$ and radius equal to $2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3} = \left|\frac{\alpha - 3}{\sqrt{3}}\right| \Rightarrow \alpha = -3, 9$

(A) $Q_2Q_3 = 12$

(B) R_2R_3 = length of transverse common tangent

$= \sqrt{(Q_2Q_3)^2 - (r_1 + r_2)^2} = \sqrt{(12)^2 - \left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{6}$



(C) Area of ΔOR_2R_3

$= \frac{1}{2} \times R_2R_3 \times$ perpendicular distance of O from line

$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{2}$

(D) Area of $\Delta PQ_2Q_3 = \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

45. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be differentiable functions such that $f(x) = x^3 + 3x + 2$, $g(f(x)) = x$ and $h(g(g(x))) = x$ for all $x \in \mathbb{R}$. Then

माना कि $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ और $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ऐसे अवकलनीय फलन हैं कि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) = x^3 + 3x + 2$, $g(f(x)) = x$ और $h(g(g(x))) = x$ हैं। तब –

(A) $g'(2) = \frac{1}{15}$ (B) $h'(1) = 666$ (C) $h(0) = 16$ (D) $h(g(3)) = 36$

Ans. BC

Sol. Here, $g(f(x)) = x \Rightarrow g(x) = f^{-1}(x)$

$h(g(g(x))) = x \Rightarrow h(g(x)) = f(x)$ (i)

$h(g(g(x))) = x \Rightarrow h(x) = f(f(x))$ (ii)

(A) $f(g(x)) = x \Rightarrow f'(g(x))\,g'(x) = 1 \therefore g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$

(B) $h'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ ($\because$ using (ii))

Put $x = 1 \Rightarrow h'(1) = 666$

(C) $h(0) = f(f(0)) = 16$

(D) $h(g(3)) = f(3)$ ($\because$ using (i))

46. Let $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, where $\alpha \in \mathbb{R}$. Suppose $Q = [q_{ij}]$ is a matrix such that $PQ = kI$, where $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ and I is the identity matrix of order 3. If $q_{23} = -\frac{k}{8}$ and $\det(Q) = \frac{k^2}{2}$, then

माना कि $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, जहाँ $\alpha \in \mathbb{R}$ है। मान लीजिए कि $Q = [q_{ij}]$ एक ऐसा आव्यूह है कि $PQ = kI$, जहाँ $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ और I तीन कोटि का तत्समक आव्यूह है। यदि $q_{23} = -\frac{k}{8}$ और $\det(Q) = \frac{k^2}{2}$ हो, तब –

(A) $\alpha = 0, k = 8$ (B) $4\alpha - k + 8 = 0$ (C) $\det(P\,\mathrm{adj}(Q)) = 2^9$ (D) $\det(Q\,\mathrm{adj}(P)) = 2^{13}$

Ans. BC

Sol. $P\left(\frac{Q}{K}\right) = I$

$\Rightarrow P^{-1} = \left(\frac{Q}{K}\right)$

$\Rightarrow \left(P^{-1}\right)_{23} = \frac{q_{23}}{K} = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow \frac{-(3\alpha+24}{12\alpha+20} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \alpha = -1$

Hence $|P| = 12\alpha + 20 = 8$

Again $|P|\left|\frac{Q}{K}\right| = |I| \Rightarrow \frac{8|Q|}{K^3} = 1$

$\Rightarrow |Q| = \frac{K^3}{8}$

$\Rightarrow \frac{K^3}{8} = \frac{K^2}{2} \Rightarrow K = 4 \Rightarrow |Q| = 8$

(C) det(P adj(Q)) $= \det(P) . \det(\text{adj}(Q))$
$= \det(P) . (\det(Q))^2 = 8 \times 8^2 = 2^3$

(D) det (Q adj(P)) $= \det(Q) . (\det P)^2 = 8 \times 8^2 = 2^9$

47. Let RS be the diameter of the circle $x^2 + y^2 = 1$, where S is the point (1, 0). Let P be a variable point (other than R and S) on the circle and tangents to the circle at S and P meet at the point Q. The normal to the circle at P intersects a line drawn through Q parallel to RS at point E. Then the locus of E passes through the point(s)

माना कि RS वृत $x^2 + y^2 = 1$ का व्यास है, जहाँ कि S बिंदु (1, 0) है। माना कि P (R और S से भिन्न) वृत पर एक चर बिन्दु है और वृत पर बिन्दुओं S और P पर खींची गई स्पर्शरेखाएँ बिन्दु Q पर मिलती हैं। वृत के बिन्दु P पर अभिलम्ब उस रेखा को, जो Q से गुजरती है तथा RS के समानान्तर है, बिन्दु E पर प्रतिच्छेदित करता है। तब E का बिन्दुपथ निम्न बिन्दुओं से गुजरता है।

(A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

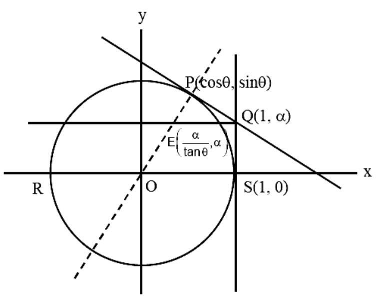
Ans. AC

Sol. $E \equiv \left(\frac{\alpha}{\tan\theta}, \alpha\right)$

$\cos\theta + \alpha \sin\theta = 1$

$\alpha = \tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ locus is $y^2 = 1 - 2x$



48. Let $f:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ be a differentiable function such that $f'(x)=2-\frac{f(x)}{x}$ for all $x\in(0,\infty)$ and $f(1)\neq1$..

Then

(A) $\lim\limits_{x\to0+} f'\left(\frac{1}{x}\right)=1$ (B) $\lim\limits_{x\to0+} x f'\left(\frac{1}{x}\right)=2$

(C) $\lim\limits_{x\to0+} x^2 f'(x)=0$ (D) $|f(x)|\leq2$ for all $x\in(0,2)$

माना कि $f:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ एक अवलकनीय फलन ऐसा है कि सभी $x\in(0,\infty)$ के लिए $f'(x)=2-\frac{f(x)}{x}$, और $f(1)\neq1$ है।

तब –

(A) $\lim\limits_{x\to0+} f'\left(\frac{1}{x}\right)=1$ (B) $\lim\limits_{x\to0+} x f'\left(\frac{1}{x}\right)=2$

(C) $\lim\limits_{x\to0+} x^2 f'(x)=0$ (D) सभी $x\in(0,2)$ के लिए $|f(x)|\leq2$

Ans. A

Sol. $f'(x)=2-\frac{f(x)}{x}$ or $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=2$

$\text{I.F.}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

$\Rightarrow y\,.\,x=x^2+c\Rightarrow f(x)=x+\frac{c}{x}$, $c\neq0$ as $f(1)\neq1$

(A) $\lim\limits_{x\to0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-cx^2\right)=1$

(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+cx^2\right)=1$

(C) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2f'(x)\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\left(1-\frac{c}{x^2}\right)\right)=-c\pm0$

(D) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ or $-\infty$, so for $c\pm0$ f(x) is unbounded function for $x\in(0,2)$

49. In a triangle XYZ, let x, y, z be the lengths of sides opposite to the angles X, Y, Z, respectively, and $2s=x+y+z$. If $\frac{s-x}{4}=\frac{s-y}{3}=\frac{s-z}{2}$ and area of incircle of the triangle XYZ is $\frac{8\pi}{3}$, then

(A) area of the triangle XYZ is $6\sqrt{6}$

(B) the radius of circumcircle of the triangle XYZ is $\frac{35}{6}\sqrt{6}$

(C) $\sin\frac{X}{2}\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{Z}{2}=\frac{4}{35}$

(D) $\sin^2\left(\frac{X+Y}{2}\right)=\frac{3}{5}$

माना कि त्रिभुज XYZ के कोणों X, Y, Z के समाने की भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः x, y, z हैं और $2s = x + y + z$ है। यदि $\frac{s-x}{4}=\frac{s-y}{3}=\frac{s-z}{2}$, त्रिभुज XYZ के अंतवृर्त का क्षेत्रफल $\frac{8\pi}{3}$ है, तब

(A) त्रिभुज XYZ का क्षेत्रफल $6\sqrt{6}$ है

(B) त्रिभुज XYZ के परिवृत की त्रिज्या $\frac{35}{6}\sqrt{6}$ है

(C) $\sin\frac{X}{2}\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{Z}{2}=\frac{4}{35}$

(D) $\sin^2\left(\frac{X+Y}{2}\right)=\frac{3}{5}$

Ans. ACD

Sol. $\frac{s-x}{4}=\frac{s-y}{3}=\frac{s-z}{2}=\frac{s}{9}$

$\Rightarrow \Delta=\frac{2\sqrt{6}}{27}s^2$ and inradius $r=\frac{2\sqrt{6}}{27}s$

$\Rightarrow s = 9, x = 5, y = 6, z = 7$

$R=\frac{35}{24}\sqrt{6}$

$r = 4R\sin\frac{X}{2}\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{Z}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{X}{2}\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{Z}{2}=\frac{4}{35}$

$\sin^2\left(\frac{X+Y}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\cos(X+Y))$

$=\frac{1}{2}(1+\cos Z)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$

[INTEGER TYPE]

Q.1 to 8 are "Integer Type" questions. (The answer to each of the questions are upto 1 digit (0 to 9))

50. Let m be the smallest positive integer such that the coefficient of x^2 in the expansion of $(1+x)^2+(1+x)^3+ \ldots\ldots + (1+x)^{49}+(1+mx)^{50}$ is $(3n+1)\,{}^{51}C_3$ for some positive integer n. Then the value of n is

माना कि m ऐसा न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है कि $(1+x)^2+(1+x)^3+ \ldots\ldots + (1+x)^{49}+(1+mx)^{50}$ के विस्तार में x^2 का गुणांक $(3n+1)\,{}^{51}C_3$ किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए है। तब n का मान है।

Ans. 5

Sol. ${}^2C_2 + {}^3C_2 + {}^4C_2 + \ldots\ldots + {}^{49}C_2 + {}^{50}C_2\, m^2 = (3n+1)\,{}^{51}C_3$

$\Rightarrow {}^{50}C_3 + {}^{50}C_2 m^2 = (3n+1)\,{}^{51}C_3$

$\Rightarrow {}^{50}C_3 + {}^{50}C_2 + (m^2-1)\,{}^{50}C_2 = 3n\,{}^{51}C_3 + {}^{51}C_3$

$$\Rightarrow n = \frac{m^2-1}{51}$$

$\Rightarrow m^2 = 51n + 1$ must be a perfect squared

$\Rightarrow n = 5$ and $m = 16$

51. Let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ be such that $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(\beta x)}{\alpha x - \sin x} = 1$. Then $6(\alpha+\beta)$ equals

माना कि $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ इस प्रकार हैं कि $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(\beta x)}{\alpha x - \sin x} = 1$ है। तब $6(\alpha+\beta)$ का मान है।

Ans. 7

Sol. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\dfrac{\sin(\beta x)}{\beta x}\right)\beta x}{\alpha x - \sin x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\beta x^3}{\alpha x - \left(x - \dfrac{x^3}{\lfloor x} + \dfrac{x^5}{\lfloor 5} + \ldots\ldots\right)} = 1 \qquad \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

For finite limit $= \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

Limit $6\beta = 1, \beta = \dfrac{1}{6}$

$$\Rightarrow 6(\alpha+\beta) = 6\left(1+\frac{1}{6}\right) = 7$$

52. Let $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, where $i = \sqrt{-1}$ and $r, s \in \{1, 2, 3\}$. Let $P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^{2s} & z^r \end{bmatrix}$ and I be the identity matrix of order 2. Then the toal number of ordered pairs (r, s) for which $P^2 = -I$ is.

माना कि $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ और $r, s \in \{1, 2, 3\}$ हैं। माना कि $P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^{2s} & z^r \end{bmatrix}$ और I दो कोटि का तत्समक आव्यूह है। तब वे सभी क्रमित युग्म (r, s), जिनके लिए $P^2 = -I$ है, की कुल संख्या है।

Ans. 1

sol. $$z = \frac{-1\sqrt{3}i}{2} = \omega$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} (-\omega)^2 & (\omega)^{2s} \\ (\omega)^{2s} & \omega^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-\omega)^r & \omega^{2s} \\ \omega^{2s} & \omega^r \end{bmatrix}$$

$P^2 = -I$

$$= \begin{bmatrix} (-\omega)^{2r} + \omega^{4s} & \omega^{2s}(\omega^2 + (-\omega)^0 \\ \omega^{2s}((-\omega)^r + \omega^r) & \omega^{2r} + \omega^{4s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \omega^{2r} + \omega^{4s} = -1$ and $\omega^{2s}(\omega^r + (-\omega)^r) = 0$

$\Rightarrow 1 + \omega^s + \omega^{2r} = 0$ and $r \neq$ odd

$\Rightarrow r = s = 1$

53. The total number of distinct $x \in \mathbb{R}$ for which $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ 2x & 4x^2 & 1+8x^3 \\ 3x & 9x^2 & 1+27x^3 \end{vmatrix} = 10$ is.

ऐसे सभी भिन्न $x \in \mathbb{R}$, जिनके लिए $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ 2x & 4x^2 & 1+8x^3 \\ 3x & 9x^2 & 1+27x^3 \end{vmatrix} = 10$ है, की कुल संख्या है।

Ans. 2

Sol. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 2x & 4x^2 & 1 \\ 3x & 9x^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 2x & 4x^2 & 8x^3 \\ 3x & 9x^2 & 27x^3 \end{vmatrix} = 10$

Using $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

Again $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 2x & 4x^2 & 1 \\ 3x & 9x^2 & 1 \end{vmatrix} + (x)(2x)(3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & 3x & 9x^2 \end{vmatrix} = 10$

$\Rightarrow (x-2x)(2x-3x)(3x-x) + 6x^3[(x-2x)(2x-3x)(3x-x)] = 10$

$\Rightarrow 2x^3(1+6x^3) = 10$ (solve by putting $x^3 = t$)

$\Rightarrow x = -1, \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$

54. The total number of distinct $x \in [0, 1]$ for which $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt = 2x-1$ is.

ऐसे सभी भिन्न $x \in [0, 1]$, जिनके लिए $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt = 2x-1$ है, की कुल संख्या है।

Ans. 1

Sol. $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt = 2x-1$

Let $f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}dt - 2x + 1$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{1+x^4} - 2 < 0 \,\forall\, x \in [0,1]$

Now, f(0) = 1 and $f(1) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4}\,dt - 1$

As $0 \le \frac{t^2}{1+t^4} < \frac{1}{2} \quad \forall\ t \in [0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,dt < \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) < 0$

$\Rightarrow$ f(x) = 0 has exactly one root in [0, 1].