PART I : MATHEMATICS
SECTION-I
[INTEGER] (Maximum Marks : 32)

41. Let m and n be two positive integers greater than 1. If $\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{e^{\cos(\alpha^n)}}{\alpha^m}\right) = -\left(\frac{e}{2}\right)$. Then the value of $\frac{m}{n}$ is :

माना कि दो धनात्मक पूर्णांक m तथा n एक (1) से बड़े हैं (greater than 1) । यदि $\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{e^{\cos(\alpha^n)}}{\alpha^m}\right) = -\left(\frac{e}{2}\right)$

तब $\frac{m}{n}$ का मान है :

Ans. 2

Sol. $\because\ m \geq 2$ and $n \geq 2$

$$= \lim_{a\to 0}\frac{e(e^{\cos(a^n)-1}-1)}{(\cos(a^n)-1)} \times \left(\frac{\cos(a^n)-1}{(a^n)^2}\right)\frac{a^{2n}}{a^m}$$

$$= e \times \lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{\cos(a^n)-1}-1)}{(\cos(a^n)-1)}\right) \times \lim_{a\to 0}\left(\frac{\cos(a^n)-1}{a^{2n}}\right) \times \lim_{a\to 0} a^{2n-m}$$

$$= e \times 1 \times -\frac{1}{2} \times \lim_{a\to 0} a^{2n-m}$$

Now $\lim_{a\to 0} a^{2n-m}$ must be equal to 1.

42. If $\alpha = \int_0^1 \left(e^{9x+3\tan^{-1}x}\right)\left(\frac{12+9x^2}{1+x^2}\right)dx$ where $\tan^{-1}x$ takes only principal values, then the value of $\left(\log_e|1+\alpha| - \frac{3\pi}{4}\right)$ is :

यदि $\alpha = \int_0^1 \left(e^{9x+3\tan^{-1}x}\right)\left(\frac{12+9x^2}{1+x^2}\right)dx$ जहाँ $\tan^{-1}x$ केवल मुख्य मानों (principal values) को लेता है, तब $\left(\log_e|1+\alpha| - \frac{3\pi}{4}\right)$ का मान है :

Ans. 9

Sol. $\alpha = \int_0^1 e^{9x+3\tan^{-1}x} . \left(\frac{12+9x^2}{1+x^2}\right)dx$

$$\Rightarrow \alpha = \left(e^{9x+3\tan^{-1}x}\right)_0^1$$

$$\Rightarrow \alpha = e^{9+\frac{3\pi}{4}} - 1$$

$\Rightarrow\ ln(1+\alpha) = 9 + \dfrac{3\pi}{4}$

After :

$$\alpha = \int_0^1 e^{(9x+3\tan^{-1}x)}\left(\frac{12+9x^2}{1+x^2}\right)dx$$

Let $9x + 3\tan^{-1} x = t$

$$\Rightarrow \left(9+\frac{3}{1+x^2}\right)dx = dt \qquad \Rightarrow \left(\frac{12+9x^2}{1+x^2}\right)dx = dt$$

$$\Rightarrow \alpha = \int e^t dt = (e^t)_0^{9+3\pi/4} = e^{9+3\pi/4} - 1$$

Now $\log_e|1+\alpha| - \dfrac{3\pi}{4} = \log_e e^{(9+3\pi/4)} - 3\pi/4 = 9$

43. Let $f: R \to R$ be a continuous odd function, which vanishes exactly at one point and $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Suppose that $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ for all $x \in [-1, 2]$ and $G(x) = \int_{-1}^{x} t\left|f(f(t))\right| dt$ for all $x \in [-1, 2]$.

If $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{1}{14}$, then the value of $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ is :

माना कि $f: R \to R$ एक संतत विषम फलन है जिसका मान केवल एक बिन्दु पर ही शून्य होता है तथा $f(1) = \dfrac{1}{2}$ है।

माना कि सभी $x \in [-1, 2]$ के लिए $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ एवं सभी $x \in [-1, 2]$ के लिए $G(x) = \int_{-1}^{x} t\left|f(f(t))\right| dt$ हैं।

यदि $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{1}{14}$ है, तब $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ का मान है :

Ans. 7

Sol. $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} f(t)dt$

$G(x) = \int_{-1}^{x} t\,|f(f(t))|\,dt = \int_{-1}^{x} t\,|f(f(t))dt$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{F(x)}{G(x)}$

L'hospitals $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x\,|f(f(x))|} = \dfrac{1}{14}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|}=\frac{1}{14}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=7$$

44. Suppose that $\vec{p},\vec{q}$ and $\vec{r}$ are three non-coplanar vectors in R^3. Let the components of a vector $\vec{s}$ along and $\vec{p},\vec{q}$ and $\vec{r}$ be 4,3 and 5 respectively. If the components of this vector $\vec{s}$ along $\left(-\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}\right)$, $\left(\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}\right)$ and $\left(-\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}\right)$ are x, y and z respectively, then the value of $2x+y+z$ is :

माना कि R^3 में, $\vec{p},\vec{q}$ और $\vec{r}$ तीन असमतलीय सदिश हैं। माना कि सदिश $\vec{s}$ के घटक क्रमागत सदिशों $\vec{p},\vec{q}$ एवं $\vec{r}$ के अनुदिश क्रमशः 4,3 और 5 हैं। यदि $\vec{s}$ के घटक क्रमागत सदिशों $\left(-\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}\right)$, $\left(\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}\right)$ एवं $\left(-\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}\right)$ के अनुदिश क्रमशः x, y और z हैं, तब $2x+y+z$ का मान है :

Ans. Bonus

Sol. This question in seem to be wrong but examiner may think like this

$$\vec{S}=4\vec{p}+3\vec{q}+5\vec{r}$$

$$\vec{S}=x(-\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})+y(\vec{p}-\vec{q}+\vec{r})+z(-\vec{p}-\vec{q}+\vec{r})$$

$-x+y-z=4$ ......(1)

$x-y-z=3$ ......(2)

$x+y+z=5$ ......(3)

add (1) and (2)

$-2z=7 \quad\Rightarrow\quad z=-\frac{7}{2}$

$2x=8 \quad\Rightarrow\quad x=4$

$2x+y+z=2(4)+1=9$

45. For any integer k, let $\alpha_k=\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)$, where $i=\sqrt{-1}$. The value of the expression

$$\frac{\sum_{k=1}^{12}\left|\alpha_{k+1}-\alpha_k\right|}{\sum_{k=1}^{3}\left|\alpha_{4k-1}-\alpha_{4k-2}\right|}$$ is

किसी भी पूर्णांक k के लिए, $\alpha_k=\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)$, जहाँ $i=\sqrt{-1}$ है। तब व्यंजक $\frac{\sum_{k=1}^{12}\left|\alpha_{k+1}-\alpha_k\right|}{\sum_{k=1}^{3}\left|\alpha_{4k-1}-\alpha_{4k-2}\right|}$ का मान है।

Ans. 4

Sol. $\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{14} + i\sin\frac{2k\pi}{14} = e^{i\frac{2k\pi}{14}}$

$$\text{Now } \frac{\sum_{k=1}^{12}\left|e^{\frac{i2(k+1)\pi}{14}} - e^{\frac{i2k\pi}{14}}\right|}{\sum_{k=1}^{3}\left|e^{\frac{i(4k-1)\pi}{14}} - e^{\frac{i(4k-2)\pi}{14}}\right|} = \frac{\sum_{k=1}^{12}\left|e^{\frac{i2\pi}{14}} - 1\right|}{\sum_{k=1}^{3}\left|e^{\frac{i2\pi}{14}} - 1\right|} = \frac{12}{3} = 4$$

46. Suppose that all the terms of an arithmetic progression (A.P.) are natural numbers. If the ratio of the sum of the first seven terms to the sum of the first eleven terms is 6 : 11 and the seventh term lies in between 130 and 140, then the common difference of this A.P. is :

माना कि एक समान्तर श्रेणी (arithmetic progression (A.P.)) के सभी पद घन पूर्णांक हैं। इस समान्तर श्रेणी में यदि पहले सात (7) पदों के योग और पहले ग्यारह (11) पदों के योग का अनुपात 6 : 11 है तथा सातवाँ पद 130 और 140 के बीच में स्थित है, तब इस समान्तर श्रेणी के सार्व अन्तर (common difference) का मान है :

Ans. 9

Sol. $\frac{S_7}{S_{11}} = \frac{6}{11}$

$\frac{\frac{7}{2}[2a+6d]}{\frac{11}{2}[2a+10d]} = \frac{6}{11}$ Given $130 < a + 6d < 140$

$\frac{7(a+3d)}{11(a+5d)} = \frac{6}{11}$

$7a + 21d = 6a + 30d \quad \Rightarrow \quad 130 < 15d < 140$

$a = 9d$ Hence $d = 9$

$a = 81$

Hence $d = 9$

Alternative :

Let the AP be $a, a + d, a + 2d, ...$

where $a, d \in N$

Given $\frac{S_7}{S_{11}} = \frac{6}{11}$ and $130 < a + 6d < 140$ .....(2)

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{7}{2}\{2a+6d\}}{\frac{11}{2}\{2a+10d\}} = \frac{6}{11}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{14a+42d}{22a+110d} = \frac{6}{11}$$

$\Rightarrow \quad 154a + 462d = 132a + 660d$

$\Rightarrow \quad 22a = 198d$

$\Rightarrow \quad a = \frac{99d}{11} = 9d$

(2) $\Rightarrow \quad \therefore \quad 130 < 9d + 6d < 140$

$\Rightarrow \quad 8.6 < d < 9.3$

$\therefore \quad d = 9$

47. The coefficient of x^9 in the expansion of $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)....(1+x^{100})$ is :

$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)....(1+x^{100})$ के विस्तार में x^9 के गुणांक का मान है :

Ans. 8

Sol. 9 = (0, 9) (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5) # 5 cases

9 = (1,2,6), (1,3,5), (2, 3, 4) # 3 cases

total = 8

48. Suppose that the foci of the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ are $(f_1, 0)$ and $(f_2, 0)$ where $f_1 > 0$ and $f_2 < 0$. Let P_1 and P_2 be two parabolas with a common vertex at (0,0) and with foci at $(f_1, 0)$ and $(2f_2, 0)$ respectively.

Let T, be a tangent to P_1 which passes through $(2f_2, 0)$ and T_2 be a tangent to P_2 which passes through $(f_1, 0)$.

If m_1 is the slope of T_1 and m_2 is the slope of T_2, then the value of $\left(\frac{1}{m_1^2}+m_2^2\right)$ is :

माना कि दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ की नाभियाँ (foci) $(f_1, 0)$ और $(f_2, 0)$ है, जहाँ $f_1 > 0$ और $f_2 < 0$ हैं। माना कि P_1 एवं P_2 दो परवलय (parabola) हैं जिनकी नाभियाँ क्रमशः $(f_1, 0)$ एवं $(2f_2, 0)$ हैं तथा दोनों के शीर्ष (vertex) (0, 0) है। माना कि P_1 की स्पर्श रेखा T_1 बिन्दु $(2f_2, 0)$ एवं P_2 की स्पर्श रेखा T_2 बिन्दु $(f_1, 0)$ से गुजरती हैं। यदि T_1 की प्रवणता (slope) m_1 हो और T_2 की प्रवणता m_2 हो, तब $\left(\frac{1}{m_1^2}+m_2^2\right)$ का मान है :

Ans. 4

Sol. $e^2 = 1-\frac{b^2}{a^2} = 1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$e = \frac{2}{3}$ focii $(2,0)(-2,0)$

$p_1 : y^2 = 8x,$

$y = m_1 x + \frac{2}{m_1}$

$0 = -4m_1 + \frac{2}{m_1}$

$\Rightarrow \quad 4m_1^2 = 2$

$\Rightarrow \quad m_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$p_2 : y^2 = -16x$

$\Rightarrow \quad y = m_2 x - \dfrac{4}{m_2}$

$\Rightarrow \quad 0 = 2m_2 - \dfrac{4}{m_2}$

$\Rightarrow \quad 2m_2^2 = 4$

$\dfrac{1}{m_1^2} + m_2^2 = 2 + 2 = 4$

PART II : MULTIPLE
SECTION-I (Maximum Marks : 32)

49. If $\alpha = 3\sin^{-1}\left(\dfrac{6}{11}\right)$ and $\beta = 3\cos^{-1}\left(\dfrac{4}{9}\right)$ where the inverse trigonometric functions take only the principal values, then the correct option (s) is (are) :

यदि $\alpha = 3\sin^{-1}\left(\dfrac{6}{11}\right)$ और $\beta = 3\cos^{-1}\left(\dfrac{4}{9}\right)$, जहाँ प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (inverse trigonometric functions) केवल मुख्य मान (principal values) ही लेते हैं, तब सही कथन है (हैं) :

(A) $\cos\beta > 0$ (B*) $\sin\beta > 0$ (C*) $\cos(\alpha+\beta) > 0$ (D*) $\cos\alpha > 0$

Sol. $\alpha = 3\sin^{-1}\dfrac{6}{11} > 3\sin^{-1}\dfrac{6}{12}$ and $\beta = 3\cos^{-1}\dfrac{4}{9} > 3\cos^{-1}\dfrac{4}{8}$

$\Rightarrow \quad \alpha > \dfrac{\pi}{2} \quad \& \quad \beta > \pi$

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta > \dfrac{3\pi}{2}$

50. Let E_1 and E_2 be two ellipses whose centers are at the origin. The major axes of E_1 and E_2 lie along the x-axis and the y-axis, respectively. Let S be the circle $x^2 + (y-1)^2 = 2$. The straight line $x + y = 3$ touches the curces S, E_1 and E_2 at P, Q and R, respectively. Suppose that $PQ = PR = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. If e_1 and e_2 are the eccentricities of E_1 and E_2 respectively, then the correct expression (s) is (are) :

माना कि E_1 और E_2 दो दीर्घवृत्त है जिनके केन्द्र मूलबिन्दु हैं। E_1 और E_2 की दीर्घ अक्षायें क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष पर स्थित है। माना कि $S : x^2 + (y-1)^2 = 2$ एक वृत्त है। सरल रेखा $x + y = 3$, वक्रों S, E_1 और E_2 को क्रमशः P, Q और R पर स्पर्श करती है। माना कि $PQ = PR = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ है। यदि e_1 और e_2 क्रमशः E_1 और E_2 की उत्केन्द्रता (eccentricities) हैं, तब सही कथन है (हैं) :

(A*) $e_1^2 + e_2^2 = \dfrac{43}{40}$ (B*) $e_1 + e_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{10}}$ (C) $\left|e_1^2 - e_2^2\right| = \dfrac{5}{8}$ (D) $e_1 e_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Sol. $E_1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$E_2 = \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$

Now as x + y = 3 is a tangent

$a^2 + b^2 = A^2 + B^2 = 9$

Now point P is

$x^2 + (2 - x)^2 = 2$

$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$x = 1$

so P is (1, 2)

points Q & R are $\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ & $\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$

Now $\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ lies on E_1 so $\frac{25}{9a^2}+\frac{16}{9\left(9-a^2\right)}=1$

$\Rightarrow \quad 225 - 25a^2 + 16a^2 = 9a^2(9- a^2) \quad \Rightarrow \quad 225 - 9a^2 = 9a^2(9 - a^2)$

$\Rightarrow \quad 25 - a^2 = a^2(9 - a^2)$

$\Rightarrow \quad a^4 - 10a^2 + 25 = 0 \qquad \Rightarrow \quad a^2 = 5 \text{ so } b^2 = 4$

$e_1^2 = \frac{1}{5}$

Now $\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$ lies on E_2

$\frac{1}{A^2}+\frac{64}{\left(9-A^2\right)}=9$

$9 - A^2 + 64A^2 = 9A^2 (9 - A^2)$

$1 + 7A^2 = A^2 = 9A^2 - A^4 \qquad \Rightarrow \qquad A^4 - 2A^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad A^2 = 1 \text{ so } B^2 = 8$

$e_2^2 = \frac{7}{8}$

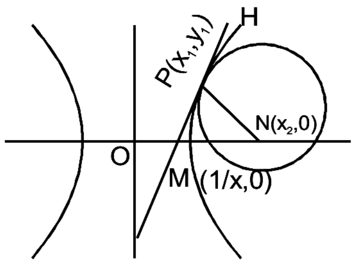
51. Consider the hyperbola $H : x^2 - y^2 = 1$ and a circle S with center $N (x_2, 0)$. Suppose that H and S touch each other at a point $P (x_1, y_1)$ with $x_1 > 1$ and $y_1 > 0$. The common tangent to H and S at P intersects the x-axis at point M . IF (l, m) is the centroid of the triangle ΔPMN, then the correct expression (s) is (are)

माना कि $H : x^2 - y^2 = 1$ एक अतिपरवलय (hyperbola) है और S एक वृत्त है जिसका केन्द्र $N (x_2, 0)$ है। माना कि H और S एक दूसरे को बिन्दु $P (x_1, y_1)$ पर स्पर्श करते है, जहाँ $x_1 > 1$ और $y_1 > 0$ है। बिन्दु P पर, H और S की सामान्य स्पर्श रेखा x-अक्ष को बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करती है। यदि (l, m) त्रिभुज ΔPMN का केन्द्रक (centroid) है, तब सही कथन है (हैं) :

(A*) $\frac{dl}{dx_1}=1-\frac{1}{3x_1^2}$ for $x_1 > 1$ (B*) $\frac{dm}{dx_1}=\frac{x_1}{3\left(\sqrt{x_1^2}-1\right)}$ for $x_1 > 1$

(C) $\frac{dl}{dx_1} = 1 + \frac{1}{3x_1^2}$ for $x_1 > 1$ (D*) $\frac{dm}{dy_1} = \frac{1}{3}$ for $y_1 > 1$

Sol.



Equation tangent to H at P is $xx_1 - yy_1 = 1$

$$l = \frac{x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1}}{3}, \qquad m = \frac{y_1}{3} = \frac{\sqrt{x_1^2 - 1}}{3}$$

$$\text{now, } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{H \text{ at } P} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{S \text{ at } P} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1$$

$$\text{So, } l = x_1 + \frac{1}{3x_1}$$

$$\frac{dl}{dx_1} = 1 - \frac{1}{3x_1^2}, \frac{dm}{dy_1} = \frac{1}{3}, \frac{dm}{dx_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 3}}$$

52. The option (s) with the values of a and L that satisfy the following equation is (are)

$$\frac{\int_0^{4\pi} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt}{\int_0^{x} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt} = L\ ?$$

निम्नलिखित में से a तथा L के कौन सा (से) मान समीकरण

$$\frac{\int_0^{4\pi} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt}{\int_0^{x} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt} = L\ ?$$

(A*) $a = 2,\ L = \frac{e^{4\pi} - 1}{e^{\pi} - 1}$ (B) $a = 2,\ L = \frac{e^{4\pi} + 1}{e^{\pi} + 1}$

(C*) $a = 4,\ L = \frac{e^{4\pi} - 1}{e^{\pi} - 1}$ (D) $a = 4,\ L = \frac{e^{4\pi} + 1}{e^{\pi} + 1}$

Sol. $I_1 = \int_0^{\pi} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt + \int_{2\pi}^{3\pi} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt$

$$= (1 + e\pi + e^{2\pi} + e^{3\pi}) \int_0^{\pi} e^t \left(\sin^6 at + \cos^4 at\right) dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = 1 + e^{\pi} + e^{2\pi} + e^{3\pi} = \frac{e^{4\pi} - 1}{e^{\pi} - 1}$$

53. Let $f, g : [-1, 2] \to R$ be continuous function which are twice differentiable on the interval $(-1, 2)$. Let the values of f and g at the points -1, 0 and 2 be as given in the following table :

माना कि $f, g : [-1, 2] \to R$ संतत फलन हैं जो की अन्तराल $(-1, 2)$ में दो बार अवकलनीय (twice differentiable) है। माना कि f और g के मान, बिन्दुओं -1, 0 और 2 पर निम्न सारणी में दर्शाए गए है :

	x = – 1	**x = 0**	**x = 2**
f (x)	3	6	0
g (x)	0	1	–1

In each of the intervals $(-1, 0)$ and $(0,2)$ the function $(f - 3g)''$ never vanishes. Then the correct statement(s) is (are)

यदि प्रत्येक अन्तराल $(-1, 0)$ और $(0,2)$ में फलन $(f - 3g)''$ कभी भी शून्य का मान नहीं लेता है, तब सही कथन है (हैं)

(A) $f'(x) - 3g'(x) = 0$ has exactly three solutions in $(-1, 0) \cup (0,2)$

(B*) $f'(x) - 3g'(x) = 0$ has exactly one solutions in $(-1, 0)$

(C*) $f'(x) - 3g'(x) = 0$ has exactly one solutions in $(0,2)$

(D) $f'(x) - 3g'(x) = 0$ has exactly two solutions in $(-1, 0)$ and exactly two solutions in $(0,2)$

(A) $(-1, 0) \cup (0,2)$ में, $f'(x) - 3g'(x) = 0$ के तीन ही हल (exactly three solutions) हैं

(B*) $(-1, 0)$ के अन्तराल में $f'(x) - 3g'(x) = 0$ का एक ही हल है।

(C*) $(0,2)$ में, $f'(x) - 3g'(x) = 0$ के एक ही हल (exactly one solutions) है

(D) $f'(x) - 3g'(x) = 0$ को $(-1, 0)$ में दो ही हल (exactly two solutions) है और $(0,2)$ में दो ही हल हैं

Sol. Let $h(x) = f(x) - 3g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} h(-1) = 3 \\ h(0) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow h'(x) = 0 \text{ has atleast one root in } (-1, 0) \text{ and atleast one root in } (0, 2)$$

$h(2) = 3$

But since $h''(x) = 0$ has no root in $(-1, 0)$ & $(0, 2)$ therefore $h'(x) = 0$ has exactly 1 root in $(-1, 0)$ & exactly 1 root in $(0, 2)$

54. Let $f(x) = 7\tan^8 x + 7\tan^6 x - 3\tan^4 x - 3\tan^2 x$ for all $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Then the correct expression (s) is (are) :

माना कि सभी $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए, $f(x) = 7\tan^8 x + 7\tan^6 x - 3\tan^4 x - 3\tan^2 x$ है, तब सही कथन है (हैं) :

(A*) $\int_0^{\pi/4} x f(x) dx = \frac{1}{12}$ (B*) $\int_0^{\pi/4} f(x) dx = 0$

(C) $\int_0^{\pi/4} xf(x)dx = \frac{1}{6}$ (D) $\int_0^{\pi/4} f(x)dx = 1$

Sol. $f(x) = (7\tan^6 x - 3\tan^2 x).\sec^2 x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^1 \left(7t^6 - 3t^2\right)dt = (t^7 - t^3)_0^1 = 0$

Now $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xf(x)dx = \int_0^1 \underset{II}{\left(7t^6 - 3t^2\right)} \underset{I}{\tan^{-1}} dt$

$= \left(\tan^{-1} t.\left(t^7 - t^3\right)\right)_0^1 - \int_0^1 \left(t^7 - t^3\right).\frac{1}{1+t^2} dt$

$= \int_0^1 \frac{t^3\left(1-t^4\right)}{1+t^2} dt = \int_0^1 t^3\left(1-t^2\right)dt$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

55. Let $f'(x) = \frac{192x^3}{2+\sin^4 \pi x}$ for all $x \in R$ with $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. If $m \le \int_{1/2}^1 f(x)dx \le M$, then the possible values of m and M are :

माना कि सभी $x \in R$ के लिए, $f'(x) = \frac{192x^3}{2+\sin^4 \pi x}$ एवं $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ है। यदि $m \le \int_{1/2}^1 f(x)dx \le M$, तब m और M के सही संभव मान है (हैं) :

(A) $m = 13, M = 24$ (B) $m = \frac{1}{4}, M = \frac{1}{2}$ (C) $m = -11, M = 0$ (D*) $m = 1, M = 12$

Sol. $f'(x) = \frac{192x^3}{2+\sin^4(\pi x)} \forall x \in R; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Now $64x^3 \le f'(x) \le 96x^3 \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

So $16x^4 - 1 \le f(x) \le 24x^4 - \frac{3}{2} \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$\frac{16}{5}.\frac{31}{32} - \frac{1}{2} \le \int_{1/2}^1 f(x)dx \le \frac{24}{5}.\frac{31}{32} - \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{26}{10} \le \int_{1/2}^1 f(x)dx \le \frac{78}{20}$ hence (D)

56. Let S be the set of all non-zero numbers α such that the quadratic equation $\alpha x^2 - x + \alpha = 0$ has two distinct real roots x_1 and x_2 satisfying the inequality $|x_1 - x_2| < 1$. Which of the following intervals is (are) a subset (s) of S ?

माना कि S उन सभी शून्येतर (non-zero) वास्तविक संख्याओं α का समुच्चय (set) है जिनके लिए द्विघाती समीकरण $\alpha x^2 - x + \alpha = 0$ के दो विभिन्न वास्तविक मूल x_1 और x_2 असमिका $|x_1 - x_2| < 1$ को सन्तुष्ट करते हैं। निम्नलिखित अन्तरालों में से कौनसा (से) समुच्चय S के उपसमुच्चय है (हैं) ?

(A*) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ (C) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (D*) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\right)$

Sol. $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 < 1$

$$\frac{1}{\alpha^2} - 4 < 1$$

$$\Rightarrow \quad 5 - \frac{1}{\alpha^2} > 0$$

$$\frac{5\alpha^2 - 1}{\alpha^2} > 0$$

+ – – +

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ 0 $\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\alpha \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \infty\right) \qquad .....(1)$$

$D > 0$

$1 - 4\alpha^2 > 0$

$$\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad .....(2)$$

(1) & (2)

$$\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Paragraph for Question 57 to 58

Let $F : R \to R$ be a thrice differentiable function. Suppose that $F(1) = 0$, $F(3) = -4$ and $F'(x) < 0$ for all $x \in (1/2, 3)$. Let $f(x) = xF(x)$ for all $x \in R$.

माना कि $F : R \to R$ एक फलन है जो तीन बार अवकलनीय (thrice differentiable) है। माना कि $F(1) = 0$, $F(3) = -4$ और सभी $x \in (1/2, 3)$ के लिए, $F'(x) < 0$ है। माना कि सभी $x \in R$ के लिए, $f(x) = xF(x)$ है।

57. The correct statement (s) is (are)

निम्नलिखित में से सही कथन है (हैं)

(A*) $f'(1) < 0$ (B*) $f(2) < 0$

(C*) $f'(x) \neq 0$ for any $x \in (1, 3)$ (D) $f'(x) = 0$ for some $x \in (1, 3)$

(A*) $f'(1) < 0$ (B*) $f(2) < 0$

(C*) किसी भी $x \in (1, 3)$ के लिए $f'(x) \neq 0$ (D) कुछ $x \in (1, 3)$ के लिए $f'(x) = 0$

Sol. $f'(x) = xf'(x) + f(x)$

$\Rightarrow \quad f'(1) = f'(1) + f(1) = f'(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad (A)$

$f(2) = 2f(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad (B)$

for $x \in (1, 3), \quad f'(x) = xf'(x) + f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad (C)$

58. If $\int_1^3 x^2 F'(x)\,dx = -12$ and $\int_1^3 x^3 F''(x)\,dx = 40$, then the correct expression (s) is (are)

यदि $\int_1^3 x^2 F'(x)\,dx = -12$ और $\int_1^3 x^3 F''(x)\,dx = 40$ है, तब सही कथन है (हैं) :

(A) $9f'(3) + f'(1) - 32 = 0$

(B) $\int_1^3 f(x)\,dx = 12$

(C*) $9f'(3) - f'(1) + 32 = 0$

(D*) $\int_1^3 f(x)\,dx = -12$

Sol. $\int_1^3 x^3 f''(x)dx = 40 \quad \Rightarrow \quad \left[x^3 f'(x)\right]_1^3 - \int_1^3 3x^2 f'(x)dx = 40$

$\Rightarrow \quad \left[x^2 f'(x) - xf(x)\right]_1^3 - 3(-12) = 40$

$\Rightarrow \quad 9f'(3) - 3f(3) - f'(1) + f(1) = 4$

$\Rightarrow \quad 9f'(3) + 36 - f'(1) + 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad 9f'(3) - f'(1) + 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad (C)$

$\Rightarrow \quad \int_1^3 x^2 f'(x)\,dx = -12 \quad \Rightarrow \quad \left[x^2 f(x)\right]_1^3 - \int_1^3 2xf(x)\,dx = -12$

$\Rightarrow \quad -36 - 2\int_1^3 f(x)\,dx = -12 \quad \Rightarrow \quad \int_1^3 f(x)\,dx = -12 \quad \Rightarrow \quad (D)$

Paragraph for Question 59 to 60

Let n_1 and n_2 be the number of red and black balls respectively, in box I. Let n_3 and n_4 be the number of red and black balls, respectively, in box II.

माना कि बॉक्स I में n_1 लाल गेंद और n_2 काली गेंद हैं। माना कि बॉक्स II में n_3 लाल गेंद और n_4 काली गेंद हैं।

59. One of the two boxes, box I and box II, was selected at random and a ball was drawn randomly out of this box. The ball was found to be red. If the probability that this red ball was drawn from box II is $\frac{1}{3}$, then the correct option(s) with the possible values of n_1, n_2, n_3 and n_4 is (are) :

बॉक्स I और बॉक्स II में से, यादृच्छया (at random) एक बॉक्स को चुना गया और इस चुने हुए बॉक्स से, यादृच्छया एक गेंद निकाली गयी। यह गेंद लाल रंग की पाई गयी। यदि इस लाल गेंद के बॉक्स II से निकाले जाने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है, तब निम्नलिखित में से n_1, n_2, n_3 और n_4 के सही संभव मान है (हैं) :

(A*) $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 15$

(B*) $n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 10, n_4 = 50$

(C) $n_1 = 8, n_2 = 6, n_3 = 5, n_4 = 20$

(D) $n_1 = 6, n_2 = 12, n_3 = 5, n_4 = 20$

Sol. Box – I < Red $\rightarrow n_1$, Black $\rightarrow n_2$ Box – II < Red $\rightarrow n_3$, Black $\rightarrow n_4$

$$P(R)=\frac{1}{2}.\frac{n_1}{n_1+n_2}+\frac{1}{2}.\frac{n_3}{n_3+n_4}$$

$$R(II/R)=\frac{\frac{1}{2}.\frac{n_3}{n_3+n_4}}{\frac{1}{2}.\frac{n_1}{n_1+n_2}+\frac{1}{2}.\frac{n_3}{n_3+n_4}}=\frac{\frac{n_3}{n_3+n_4}}{\frac{n_1}{n_1+n_2}+\frac{n_3}{n_3+n_4}}$$

by option $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 15$

$$P(II/R)=\frac{\frac{5}{20}}{\frac{3}{6}+\frac{5}{20}}=\frac{n_4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{2+1}=\frac{1}{3}$$

60. A ball is drawn at random from box I and transferred to box II. If the probability of drawing a red ball from box I, after this transfer, is $\frac{1}{3}$, then the correct option (s) with the possible values of n_1 and n_2 is (are)

बॉक्स I में से यादृच्छया (at random) एक गेंद निकाली जाती है और उसे बॉक्स II में प्रतिस्थापित (transfer) की जाती है। यदि इस प्रतिस्थापना के बाद, बॉक्स I में से एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है, तब निम्नलिखित में से n_1 और n_2 के सही संभव मान है (हैं)

(A) $n_1 = 4$ and $n_2 = 6$ (B) $n_1 = 2$ and $n_2 = 3$
(*C) $n_1 = 10$ and $n_2 = 20$ (*D) $n_1 = 3$ and $n_2 = 6$
(A) $n_1 = 4$ तथा $n_2 = 6$ (B) $n_1 = 2$ तथा $n_2 = 3$
(*C) $n_1 = 10$ तथा $n_2 = 20$ (*D) $n_1 = 3$ तथा $n_2 = 6$

Sol. Given $\frac{n_1}{n_1+n_2}.\frac{n_1-1}{n_1+n_2-1}+\frac{n_2}{n_1+n_2}.\frac{n_1}{n_1+n_2-1}=\frac{1}{3}$

$3(n_1^2-n_1+n_1n_2)=(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)$

$3n_1(n_1+n_2-1)=n_1+n_2(n_1+n_2-1)$

$2n_1=n_2$