SECTION-III

[INTEGER TYPE]

Q.1 to 8 are "Integer Type" questions. (The answer to each of the questions are upto 1 digit (0 to 9))

41. The numer of distinct solutions of the equation

$$\frac{5}{4}\cos^2 2x + \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^6 x + \sin^6 x = 2$$

in the interval $[0, 2\pi]$ is

अंतराल $[0, 2\pi]$ में समीकरण

$$\frac{5}{4}\cos^2 2x + \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^6 x + \sin^6 x = 2$$

के विभिन्न हलों की संख्या है।

Ans. 8

Sol. $\frac{5}{4}\cos^2 2x + \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^6 x + \sin^6 x = 2$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{4}\cos^2 2x + 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 2$

$\Rightarrow \quad \cos^2 2x = \sin^2 2x$

$\Rightarrow \quad \tan^2 2x = 1$

Now $\quad 2x \in [0, 4\pi] \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8},$

so number of solution = 8

42. Let the curve C be the mirror image of the parabola $y^2 = 4x$ with respect to the line $x + y + 4 = 0$. If A and B are the points of intersection of C with the line $y = -5$, then the distance between A and B is

माना कि वक्र C, रेखा $x + y + 4 = 0$ के सापेक्ष में, परवलय $y^2 = 4x$ का दर्पण प्रतिबिम्ब है। यदि A और B वक्र C और रेखा $y = -5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु है, तब A और B के बीच की दूरी है।

Ans. 4

Sol. let $P(t^2, 2t)$ be a point on the curve $y^2 = 4x$ and $Q(h, k)$ be it's image in $x + y + 4 = 0$

$$\frac{h - t^2}{1} = \frac{k - 2t}{1} = -\frac{2(t^2 + 2t + 4)}{2} \quad \Rightarrow \quad h = -(2t + 4)$$

$k = -(t^2 + 4)$

Now $k = -5$

so $t = \pm 1$

hence $h = -2, -6$

so A, B are $(-2, -5)$ & $(-6, -5)$

Hence AB = 4

43. The minimum number of times a fair coin needs to be tossed, so that the probability of getting at least two heads is at least 0.96, is :

एक न्याय सिक्के को न्यूनतम कितनी बार उछालना पड़ेगा, जिससे कि कम से कम दो चित प्रकट होने की प्रायिकतस कम से

कम 0.96 हों ?

Ans. 8

Sol. Let coin is tossed n times

P(atleast two heads) = $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n - {}^nC_2.\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0.96 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{100} \geq \frac{n+1}{2^n}$

$\Rightarrow \quad \frac{n+1}{2^n} \leq \frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad \frac{2^n}{n+1} \geq 25$

$\Rightarrow$ least value of n is 8

44. Let n be the number of ways in which 5 boys and 5 girls can stand in a queue in such a way that all the girls stand consecutively in the queue. Let m be the number of ways in which 5 boys and 5 girls can stand in a queue in such a way that exactly four girls stand consecutively in the queue. Then the value of $\frac{m}{n}$ is

माना कि n तरीकों से 5 लड़के और 5 लड़कियाँ एक पंक्ति में इस प्रकार खड़े हो सकते है कि सभी लड़कियाँ पंक्ति में क्रमागत खड़ी हों। माना कि m तरीकों से 5 लड़के और 5 लड़कियाँ एक पंक्ति में इस प्रकार खड़े हो सकते है कि ठीक 4 लड़कियाँ ही पंक्ति में क्रमागत खड़ी हों। तब $\frac{m}{n}$ का मान है।

Ans. 5

Sol. $n = 5! \times 6!$

$m = 5! \times {}^6C_2 \times {}^5C_4.2!.4!$

$\frac{m}{n} = \frac{5! \times 15 \times 2 \times 5!}{6!} = 5$

45. If the normals of the parabola $y^2 = 4x$ drawn at the end point of its latus rectum are tangents to the circle $(x-3)^2+(y+2)^2 = r^2$, then the value of r^2 is

यदि परवलय $y^2 = 4x$ के नाभिलम्ब जीवा (latus rectum) के शिखर बिन्दुओं पर खींचे गए अभिलम्ब वृत $(x-3)^2+(y+2)^2 = r^2$ की स्पर्श रेखाएँ हैं, तब r^2 का मान है।

Ans. 2

Sol. Equation of normals at points $(1, \pm 2)$ are

$y = -x + 3 \quad \& \quad y = x - 3$

$\Rightarrow \quad x + y - 3 = 0 \quad \& \quad x - y - 3 = 0$

Now $\left|\frac{3-2-3}{\sqrt{1-1}}\right| = r \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2$

46. Let $f : R \to R$ be a function defined by $f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

where [x] is the greatest integer less than or equal to x.

If $\int_{-1}^{2} \frac{x f(x^2)}{2 + f(x+1)} dx$, then the value of $(4I - 1)$ is

माना कि फलन $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} [x], & x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$ से परिभाषित है,

जहाँ $[x]$, x से कम या x के बराबर के महतम पूर्णांक को दर्शाता है।

यदि $\int_{-1}^{2} \frac{x f\left(x^2\right)}{2+f\left(x+1\right)} dx$, तब $(4I-1)$ का मान है।

Ans. 0

Sol. $I = \int_{-1}^{2} \frac{x[x^2]}{2+[x+1]} dx = \int_{-1}^{2} \frac{x[x^2]}{3+[x+1]} dx = \int_{-1}^{0} \frac{0}{3-1} dx + \int_{0}^{1} \frac{0}{3+0} dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x.1}{3+1} dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad 4I - 1 = 0$

47. A cylindrical container is to be made from certain solid material with the following constraints. It has a fixed inner volume of V mm^3, has a 2 mm thick wall and is open at the top. The bottom of the container is a solid circular disc of thickness 2 mm and is of radius equal to the outer radius of the container.
If the volume of the material used to make the container is minimum when the inner radius of the container is 10 mm, then the value of $\frac{V}{250\pi}$ is :

निम्न व्यवरोधों को संतुष्ट करते हुए एक बेलनाकार पात्र एक ठोस पदार्थ से बनाया है। पात्र का आन्तरिक आयतन V घन मिमी नियत है तथा इसकी दीवार 2 मिमी मोटाई की हैं एवं पात्र ऊपर से खुला है। पात्र का निचला तल 2 मिमी मोटाई वाला ठोस वृतीय डिस्क है तथा जिसकी त्रिज्या, पात्र की बाहरी त्रिज्या के बराबर है। यदि पात्र की आंतरिक त्रिज्या 10 मिमी होने पर पदार्थ के न्यूनतम आयतन की आपश्यकता होती हो, तब $\frac{V}{250\pi}$ का मान है।

Ans. 4

Sol. Volume of material $V = \pi r^2 h$

$\Rightarrow \quad V_1 = \pi(r+2)^2 2 + \pi(r+2)^2 h - \pi r^2 h$

$\Rightarrow \quad V_1 = 2\pi(r+2)^2 + \pi h\,(4+4r)$

$\Rightarrow \quad V_1 = 2\pi(r+2)^2 + 4\pi h(r+1)$

$\Rightarrow \quad V_1 = 2\pi\left((r+2)^2 + \frac{2(r+1)V}{\pi r^2}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{dV_1}{dr} = 2\pi\left(2(r+2) + \frac{2v}{\pi}\left(\frac{-1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\right)\right) = 0$

$\Rightarrow \quad 24 + \frac{2V}{\pi}\left(\frac{-2-10}{10^3}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{24v}{10^3\pi} = 24$

$\Rightarrow \quad v = 10^3\pi$

$\Rightarrow \quad \frac{v}{250\pi} = 4$

48. Let $F(x) = \int_{x}^{x^2+\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t\,dt$ for all $x \in R$ and $f: \left[0,\frac{1}{2}\right] \to [0,\infty)$ be a continuous function. For $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, if F'(a) + 2 is the area of the region bounded by x = 0, y = 0, y = f(x) and x = a, then f (0) is :

माना कि सभी $x \in R$ के लिए, $F(x) = \int_{x}^{x^2+\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t\,dt$ तथा $f: \left[0,\frac{1}{2}\right] \to [0,\infty)$ एक संतत फलन है। यदि उन सभी $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ के लिए F'(a) + 2 उस क्षेत्र का क्षेत्रफल है, जो कि x = 0, y = 0, y = f(x) और x = a से घिरा हुआ है, तब f (0) का मान है।

Ans. 3

Sol. $F(x) = \int_{x}^{x^2+\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 + dt$

$$F'(x) = 2\left(\cos\left(x^2+\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 2x - 2\cos^2 x$$

$$\because \quad F'(a) + 2 = \int_0^a f(x)dx$$

$$2\left(\cos\left(a^2+\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 2a - 2\cos^2 a + 2 = \int_0^a f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos^2\left(a^2+\frac{\pi}{6}\right) + 4a\,2\cos\left(a^2+\frac{\pi}{6}\right).\left(\sin\left(a^2+\frac{\pi}{6}\right)\right)\times 2a + 4\cos a \sin = f(a)$$

$$\therefore \quad f(0) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$$

[MULTIPLE CORRECT CHOICE TYPE]

Q.9 to Q.18 has four choices (A), (B), (C), (D) out of which ONE OR MORE may be correct.

49. Let X and Y be two arbitrary, 3×3, non-zero, skew-symmetric matrices and Z be an arbitrary 3×3, non zero, symmetric matrix. Then which of the following matrices is (are) skew symmetric ?

माना कि X एवं Y दो स्वेच्छ, 3×3 शून्येतर विषम सममित आव्यूह है और Z एक स्वेच्छ 3×3, शून्येतर सममित आव्यूह है। तब निम्नलिखित में से कौनसा (से) विषम सममित आव्यूह है (हैं) ?

(A) $Y^3Z^4 - Z^4Y^3$ (B) $X^{44} + Y^{44}$ (C*) $X^4Z^3 - Z^3S^4$ (D*) $X^{23} + Y^{23}$

Sol. (C) $(x^4 Z^3 - Z^3 X^4)T = (X^4Z^3)T\,(Z^3 X^4)T$

$= (ZT)^3(XT)^4 - (XT)^4(ZT)^3$

$= Z^3X^4 - X^4Z^3$

$= -(X^4Z^3 - Z^3X^4)$

(D) $(X^{23} + Y^{23})^T = -X^{23} - Y^{23}$ $\Rightarrow X^{23} + Y^{23}$ is skew–symmetric

50. Which of the following values of α satisy the equation $\begin{vmatrix} (1+\alpha)^2 & (1+2\alpha)^2 & (1+3\alpha)^2 \\ (2+\alpha)^2 & (2+2\alpha)^2 & (2+3\alpha)^2 \\ (3+\alpha)^2 & (3+2\alpha)^2 & (3+3\alpha)^2 \end{vmatrix} = -648\,\alpha$?

α के निम्नलिखित मानों में कौन सा मान समीकरण $\begin{vmatrix} (1+\alpha)^2 & (1+2\alpha)^2 & (1+3\alpha)^2 \\ (2+\alpha)^2 & (2+2\alpha)^2 & (2+3\alpha)^2 \\ (3+\alpha)^2 & (3+2\alpha)^2 & (3+3\alpha)^2 \end{vmatrix} = -648\,\alpha$ को संतुष्ट करता है?

(A) –4 (B*) 9 (C*) –9 (D) 4

Sol. $R_3 \to R_3 - R_2, R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{vmatrix} (1+\alpha)^2 & (1+2\alpha)^2 & (1+3\alpha)^2 \\ 3+2\alpha & 3+4\alpha & 3+6\alpha \\ 5+2\alpha & 5+4\alpha & 5+6\alpha \end{vmatrix} = -648\alpha$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{vmatrix} (1+\alpha)^2 & (1+2\alpha)^2 & (1+3\alpha)^2 \\ 3+2\alpha & 3+4\alpha & 3+6\alpha \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -648\alpha$$

$C_3 \to C_3 - C_2, C_2 \to C_2 - C_1$

$$\begin{vmatrix} (1+\alpha)^2 & \alpha(2+3\alpha) & \alpha(2+5\alpha) \\ 3+2\alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -648\alpha$$

$\Rightarrow \quad 2\alpha^2(2+3\alpha) - 2\alpha^2(2+5\alpha) = -324\alpha$

$\Rightarrow \quad -4\alpha^3 = -324\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \pm 9$

51. In R^3, consider the planes $P_1 : y = 0$ and $P_2 : x + z = 1$. Let P_3 be a plane, different from P_1 and P_2, which passes through the intersection of P_1 and P_2. If the distance of the point (0,1,0) from P_3 is 1 and the distance of a point (α, β, γ) from P_3 is 2, then which of the following relations is (are) true ?

मान लीजिए कि R^3 में $P_1 : y = 0$ और $P_2 : x + z = 1$ दो समतल है। माना कि P_3 एक समतल है जो समतल P_1 एवं P_2 से भिन्न है तथा P_1 एवं P_2 के प्रतिच्छेदन से जाता है। यदि बिन्दु (0,1,0) से P_3 की दूरी एक (1) है तथा बिन्दु (α, β, γ) से P_3 की दूरी दो (2) है, तब निम्नलिखित सम्बंध में कौन कौन से संतुष्टित होते है।

(A) $2\alpha + \beta + 2\gamma + 2 = 0$ (B*) $2\alpha - \beta + 2\gamma + 4 = 0$

(C) $2\alpha + \beta - 2\gamma - 10 = 0$ (D*) $2\alpha - \beta + 2\gamma - 8 = 0$

Sol. Let P_3 be $P_2 + \lambda P_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \lambda y + z - 1 = 0$

Distance from (0, 1, 0) is 1

$$\therefore \quad \frac{0+\lambda+0-1}{\sqrt{1+\lambda^2+1}} = \pm 1$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ Equation of P_3 is $2x - y + 2z - 2 = 0$

Dist. from (α, β, γ) is 3

$\therefore \left|\frac{2\alpha - \beta + 2\gamma - 2}{3}\right| = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha - \beta + 2\gamma \pm 6$

$\therefore$ option (B, D) are correct.

52. In R^3, let L be a straight line passing through the origin. Suppose that all the points on L are at a constant distance from the two planes $P_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ and $P_2 : 2x - y + z - 1 = 0$. Let M be the locus of the feet of the perpendiculars drawn from the points on L to the plane P_1.
Which of the following points lie (s) on M ?
माना कि R^3 में L एक सरल रेखा है जो कि मूल बिन्दु से जाती है। माना कि L से सभी बिन्दु समतलों $P_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ तथा $P_2 : 2x - y + z - 1 = 0$ से स्थिर दूरी पर है। माना कि L के बिन्दुओं से समतल P_1 पर डाले गए लम्बों के पादों का पथ M है। निम्नलिखित बिन्दुओं में से कौन सा बिन्दु पथ M पर स्थित है ?

(A*) $\left(0, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}\right)$ (B*) $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ (C) $\left(-\frac{5}{6}, 0, \frac{1}{6}\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$

Sol. Let $\vec{v}$ be the vector along L

then $\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

So any point on line L is $A(\lambda, -3\lambda, -5\lambda)$

Foot of perpendicular from A to P, is

$$\frac{h - \lambda}{1} = \frac{k - 3\lambda}{2} = \frac{l + 5\lambda}{-1} = -\frac{(\lambda - 6\lambda + 5\lambda + 1)}{1 + 4 + 1} = -\frac{1}{6}$$

$h = \lambda - \frac{1}{6}, k = -3\lambda - \frac{1}{3}, l = -5\lambda + \frac{1}{6}$

so foot is $\left(\lambda - \frac{1}{6}, -3\lambda - \frac{1}{3}, -5\lambda + \frac{1}{6}\right)$

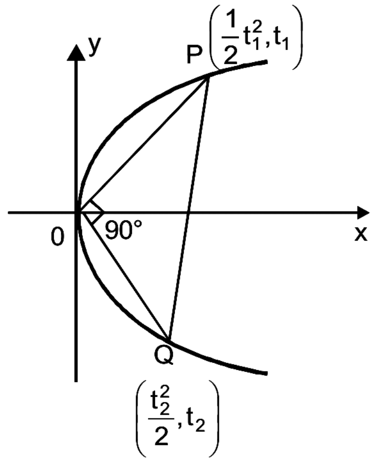
So, (A,B)

53. Let P and Q be distinct points on the parabola $y^2 = 2x$ such that a circle with PQ as diameter passes through the vertex O of the parabola. If P lies in the first quadrant and the area of the triangle ΔOPQ is $3\sqrt{2}$, then which of the following is (are) the coordinates of P ?
माना कि विभिन्न बिन्दु P और Q परवलय $y^2 = 2x$ पर इस प्रकार लिए गए है कि एक वृत, जिसका व्यास PQ है, इस परवलय के शीर्ष O से जाता है। यदि P प्रथम चतुरांश में स्थित है तथा त्रिभुज ΔOPQ का क्षेत्रफल $3\sqrt{2}$ है, तो निम्न में से कौन कौन से बिन्दु P के निर्देशांक है ?

(A*) $\left(4, 2\sqrt{2}\right)$ (B) $\left(9, 3\sqrt{2}\right)$ (C) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (D*) $\left(1, \sqrt{2}\right)$

Sol. OP $\perp$ OQ $\Rightarrow$ $t_1 t_2 = -4$

Now $\frac{1}{2}.OP.OQ = 3\sqrt{2}$



$\Rightarrow$ $\left|\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{t_1^4}{4}+t_1^2}.\sqrt{\frac{t_2^4}{4}+t_2^2}\right| = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}.4.\sqrt{\frac{\left(t_1^2+4\right)}{4}\frac{\left(t_2^2+4\right)}{4}} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $4.\frac{\left(16+4\left(t_1^2+t_2^2\right)+16\right)}{16} = 9\times 2$

$\Rightarrow$ $8+t_1^2+t_2^2 = 18$

$\Rightarrow$ $t_1^2+t_2^2-10 = 0$

$\Rightarrow$ $t_1^4-10t_1^2+16 = 0$

$\Rightarrow$ $t_1^2 = 2, 8$

54. Let y (x) be a solution of the differential equation $(1+e^x)y' + ye^x = 1$. If $y(0) = 2$, then which of the following statements is (are) true ?

(A*) $y(-4) = 0$ (B) $y(-2) = 0$

(C*) y(x) has a critical point in the interval $(-1, 0)$ (D) y(x) has no critical point in the interval $(-1, 0)$

माना कि y (x) अवकल समीकरण $(1+e^x)y' + ye^x = 1$ का हल है। यदि $y(0) = 2$ तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा सही है ?

(A) $y(-4) = 0$ (B) $y(-2) = 0$

(C) y(x) का एक क्रांतिक बिन्दु अंतराल $(-1, 0)$ में है (D) y(x) का कोई भी क्रांतिक बिन्दु अंतराल $(-1, 0)$ में नहीं है।

Sol. $(1+e^x)\frac{dy}{dx}+ye^x = 1$

$\frac{dy}{dx}+\frac{e^x}{1+e^e}y = \frac{1}{1+e^x}$

I.F $= e^{\int\frac{e^x}{1+e^x}dx} = e^{ln(1+e^x)} = 1+e^x$

complete solution $y.(1+e^x) = \int 1dx$

$(1 + e^x)y = x + c$

$x = 0, y = 2$ $\Rightarrow$ $c = 4$

$(1 + e^x)y = x + 4$

$y = \frac{x+4}{e^x+1}$

$x = -4, y = 0$

$x = -2, \quad y = \frac{2}{x^{-2}+1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(e^x+1\right).1-\left(x+4\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

$\frac{e^x\left(-x-3\right)+1}{\left(e^x+1\right)^2}$

$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \quad x+3 = e^{-x}$

$e^x = \frac{1}{x+3}$

55. Consider the family of all circles whose centers lie on the straight line $y = x$. If this family of circles is represented by the differential equation $Py'' + Qy' + 1 = 0$, where P, Q are functions of x, y and y' (here $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$), then which of the following statements is (are) true ?

उन सभी वृत–कुल को विचार कीजिए जिनके केन्द्र सरल रेखा $y = x$ पर स्थित है। यदि इस वृत–कुल के सभी वृत, अवकल समीकरण $Py'' + Qy' + 1 = 0$ से निरूपित होते है, जहाँ P, Q इस प्रकार है कि वे x, y और y' के फलन है (यहाँ $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$), तब निम्नलिखित कथनों में से कौन कौन से सही है ?

(A) $P = y + x$
(B*) $P = y - x$
(C*) $P + Q = 1 - x + y + y' + (y')^2$
(D) $P - Q = x + y - y' - (y')^2$

Sol. $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + 2\alpha^2 - r^2 = 0$

$2x + 2yy' - 2\alpha y' = 0 \qquad$ .....(i)

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{x+yy'}{1+y'} \qquad$ ...(ii)

again diff. w.r.t.

$2 + 2(y')2 + 2yy'' - 2\alpha y'' = 0$

$\Rightarrow \quad 1+(y')^2 + yy' - \left(\frac{x+yy'}{1+y'}\right)y'' = 0$

$\Rightarrow \quad 1 + y' + (y')^2 + (y')^3 + yy'' + yy'y' - xy'' - yy'y'' = 0$

$\Rightarrow \quad (y - x)y'' + (1 + y + (y')^2)\, y' + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad P = y - x, Q = 1 + y' + (y')^2$

Ans. (B,C)

Note : P & Q will not be unique function as

$Py'' + Qy' + Ry' - Ry' + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{Py'}{1-Ry''} + \dfrac{Qy'}{1-Ry'} + 1 = 0$ Hence new P & Q can be obtained.

So it can be a controversial problem.

56. Let $g : R \to R$ be a differentiable function with $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ and $g'(1) \neq 0$. Let $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} g(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

and $h(x) = e^{|x|}$ for all $x \in R$. Let $(f \circ h)(x)$ denote $f(h(x))$ and $(h \circ f)(x)$ denote $h(f(x))$.
Then which of the following is (are) true ?

(A*) f is differentiable at $x = 0$ (B) h is differentiable at $x = 0$

(C) $f \circ h$ is differentiable at $x = 0$ (D*) $h \circ f$ is differentiable at $x = 0$

माना कि $g : R \to R$ एक अवकलनीय फलन है जहाँ कि $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ एवं $g'(1) \neq 0$ है। माना कि

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} g(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ और प्रत्येक $x \in R$ के लिए $h(x) = e^{|x|}$ है। माना कि $(f \circ h)(x)$, $f(h(x))$ को और $(h \circ f)(x)$, $h(f(x))$ को दर्शाते है। तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा सही है ?

(A) $x = 0$ पर f अवकलनीय है (B) $x = 0$ पर h अवकलनीय है

(C) $x = 0$ पर $f \circ h$ अवकलनीय है (D) $x = 0$ पर $h \circ f$ अवकलनीय है

Sol. $g(0) = 0,$ $g'(0) = 0$ $g'(1) \neq 0$

$$f(x) \begin{cases} g(x) & ; \quad x > 0 \\ -g(x) & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad 0 \end{cases} \quad h(x) = e^{|x|}$$

$$f(h(x)) = g(e^{|x|}), h(f(x)) = e^{|g(x)|}$$

$$R(f'(0)) = \lim_{x \to 10} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0$$

$$h(f'(0)) = \lim_{x \to 10} \frac{-g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0$$

$R(h'(0)) = 1$ & $L(h'(0)) = -1$ So h(x) is non derivable. at $x = 0$

$$\text{Now } \lim_{x \to 0} \frac{f(h)(x)) - f(h(0))}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(e^{|x|}) - g(1)}{x}$$

$$R(f'(h(x))) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(e^x) - g(1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(e^x) - g(1)}{e^x - 1} \frac{e^x - 1}{x} = g'(1)$$

$L(f'(h(x))) = -g'(1)$ Hencef(h(x)) is non derivable at $x = 0$

57. Let $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)\right)$ for all $x \in R$ and $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin x$ for all $x \in R$. Let $(f \circ g)(x)$ denote $f(g(x))$ and $(g \circ f)(x)$ denote $g(f(x))$. Then which of the following is (are) true ?

(A*) Range of f is $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (B*) Range of f o g is $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(C*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pi}{6}$ (D) There is an $x \in R$ such that $(g \text{ o } f)(x) = 1$

माना कि सभी $x \in R$ के लिए $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)$ और सभी $x \in R$ के लिए $g(x)=\frac{\pi}{2}\sin x$ है। माना कि $(f \text{ o } g)(x)$ और $(g \text{ o } f)(x)$ क्रमशः $f(g(x))$ और $g(f(x))$ को दर्शाते हैं, तब निम्नलिखित में से कौन सही है ?

(A) f का परिसर $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ है। (B) f o g का परिसर $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ है।

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pi}{6}$ (D) R में एक x ऐसा है जिसके लिए $(g \text{ o } f)(x) = 1$

Sol. $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)$

Let $\frac{\pi}{2}\sin x=\theta$ $\quad\because\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore\ f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin\theta\right)$

Let $\frac{\pi}{6}\sin\theta=\phi$ $\quad\therefore\ \phi\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$

$\therefore\ f(x)=\sin\phi\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ $\quad\therefore$ (A)

Now $fog(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)\right)$

Clearly, range of fog is also $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\quad\therefore$ (B)

Now, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)}{\frac{\pi}{2}\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)}{\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\times\frac{\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{\frac{\sin x}{x}\times x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{6}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{\frac{\pi}{2}\sin x}\times\frac{\frac{\pi}{2}\sin x}{x}$$

$\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore$ (C)

Now, $\quad gof(x)=1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)=1$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)=\frac{2}{\lambda}\cong\frac{2}{3.14}>\frac{1}{2} \qquad \therefore \text{ (D)}$$

58. Let ΔPQR be a triangle. Let $\vec{a}=\overrightarrow{QR}$, $\vec{b}=\overrightarrow{RP}$ and $\vec{c}=\overrightarrow{PQ}$. If $|\vec{a}|=12$, $|\vec{b}|=4\sqrt{3}$ and $\vec{b}.\vec{c}$ = 24, then which of the following is (are) true ?

माना कि ΔPQR एक त्रिभुज है। माना कि $\vec{a}=\overrightarrow{QR}$, $\vec{b}=\overrightarrow{RP}$ और $\vec{c}=\overrightarrow{PQ}$ है। यदि $|\vec{a}|=12$, $|\vec{b}|=4\sqrt{3}$ और $\vec{b}.\vec{c}$ = 24, तब निम्नलिखित में से कौन कौन से सही है ?

(A*) $\frac{|\vec{c}|^2}{2}-|\vec{a}|=12$ (B) $\frac{|\vec{c}|^2}{2}+|\vec{a}|=30$

(C*) $|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}|=48\sqrt{3}$ (D*) $\vec{a}.\vec{b}=-72$

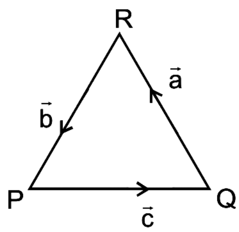
Sol. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$\Rightarrow \quad \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$

$\Rightarrow \quad 48+\vec{c}^2+48=144$

$\Rightarrow \quad \vec{c}^2=48$

$\Rightarrow \quad |\vec{c}^2|=4\sqrt{3}$



$\therefore \quad \frac{|\vec{c}|^2}{2}-|\vec{a}|=24-12=12$ $\qquad$ Ans. (A)

Further

$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

$\Rightarrow \quad 144+48+2\vec{a}.\vec{b}$

$=48$

$\Rightarrow \quad \vec{a}.\vec{b}=-72$ $\qquad$ Ans. (D)

$\because \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$

$\therefore \quad |\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}|=2|\vec{a}\times\vec{b}| \;=2.\sqrt{144.48-(72)^2}=48\sqrt{3}$ $\qquad$ Ans. (C)

[MATRIX MATCH]

Q.59 & 60 has **four** statements (A, B, C, D) given in **Column-I** and **four** statements (P, Q, R, S) given in **Column-II**. Any given statement in **Column-I** can have correct matching with one or more statement(s) given in **Column-II**.

59. Column I | **Column II**

(A) In R^2, if the magnitude of the projection vector of the vector $\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}$ on $\sqrt{3}\,\hat{i}+\hat{j}$ is $\sqrt{3}$ and if $\alpha = 2+\sqrt{3}\,\beta$, then possible value(s) of $|\alpha|$ is (are)zx — (P) 1

(B) Let a and b be real numbers such that the function $f(x)=\begin{cases}-3ax^2-2, & x<1\\ bx+a^2, & x\ge 1\end{cases}$ — (Q) 2

is differentiable for all $x \in \hat{I}R$. Then possible value(s) of a is (are)

(C) Let $\omega \neq 1$ be a complex cube root of unity. If — (R) 3

$(3-3\omega+2\omega^2)^{4n-3}+(2+3\omega-3\omega^2)^{4n+3}+(-3+2\omega+3\omega^2)^{4n-3}=0,$

then possible value(s) of n is (are)

(D) Let the harmonic mean of two positive real numbers a and b be 4. If q is a positive real number such that a, 5, q, b is an arithmetic progression, then the value(s) of |q – a| is (are) — (S) 4

(T) **5**

(A) माना कि R^2 में, यदि सदिश $\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}$ का सदिश $\sqrt{3}\,\hat{i}+\hat{j}$ पर प्रक्षेप सदिश का परिमाण $\sqrt{3}$ हो और यदि $\alpha = 2+\sqrt{3}\,\beta$ हो, तब $|\alpha|$ के संभव मान है। — (P) 1

(B) माना कि वास्तविक संख्याएं a और b इस प्रकार है कि फलन $f(x)=\begin{cases}-3ax^2-2, & x<1\\ bx+a^2, & x\ge 1\end{cases}$ — (Q) 2

सभी $x \in R$ के लिए अवकलनीय है। तब α के संभव मान है।

(C) माना कि $\omega \neq 1$ इकाई का एक सम्मिश्र घनमूल है। यदि — (R) 3

$(3-3\omega+2\omega^2)^{4n-3}+(2+3\omega-3\omega^2)^{4n+3}+(-3+2\omega+3\omega^2)^{4n-3}=0,$

तब n के संभव मान है।

(D) माना कि दो धनात्मक वास्तविक संख्याएं a और b का हरात्मक माध्य 4 है। यदि एक धनात्मक वास्तविक संख्या q इस प्रकार है कि a, 5, q, b एक समान्तर श्रेणी है। तब |q – a| का मान है। — (S) 4

(T) 5

Ans. A – PQ, B – PQ, C– PQST, D – QT

Sol. (A) $\left|\left(\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}\right).\left(\frac{\sqrt{3}\hat{i}+\hat{j}}{2}\right)\right| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\alpha+\beta = \pm 2\sqrt{3}$

$$\sqrt{3}\alpha+\left(\frac{\alpha-2}{\sqrt{3}}\right)=\pm 2\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \quad 3\alpha+\alpha-2=\pm 6 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha = 8,-4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2,-1$

$(A \to P, Q)$

(B) Continuous $\Rightarrow \quad -3a-2=b+a^2$

differentiable $\Rightarrow \quad -6a=b \quad \Rightarrow \quad 6a=a^2+3a+2$

$\Rightarrow \quad a^2-3a+2=0 \quad \Rightarrow \quad a=1,2$

$(B \rightarrow P, Q)$

(D) $\frac{2ab}{a+b} = 4 \quad \Rightarrow \quad ab = 2a + 2b$ ....(i)

$q = 10 - a$ and $2q = 5 + b$

$\Rightarrow \quad 20 - 2a = 5 + b \Rightarrow 15 = 2a + b$ ....(ii)

From (i) and (ii) $a(15 - 2a) = 2a + 2(15 - 2a)$

$\Rightarrow \quad 15a - 2a^2 - 2a + 30 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 - 17a + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6, \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad q = 4, \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad |q - a| = 2, 5$

$(D \rightarrow Q, T)$

(C) Let $a = 3 - 3\omega + 2\omega^2$

$a\omega = 3\omega - 3\omega^2 + 2$

$a\omega^2 = 3\omega^2 - 3 + 2\omega$

Now $a^{4n+3}(1 + \omega^{4x+3} + (\omega^2)^{4n+3}) = 0$

$\Rightarrow$ n should not be a multiple of 3

Hence P, Q, S, T

60. **Column I** **Column II**

(A) In a triangle ΔXYZ, let a, b and c be the lengths of the sides opposite to the angles X, Y and Z, respectively. If $2(a^2 - b^2) = c^2$ and $\lambda = \frac{\sin(X - Y)}{\sin Z}$, then possible values of n for which $\cos(n\pi\lambda) = 0$ is (are) — (P) 1

(B) In a triangle ΔXYZ, let a, b and c be the lengths of the sides opposite to the angles X, Y and Z, respectively. If $1 + \cos 2X - 2\cos 2Y = 2 \sin X \sin Y$, then possible value(s) of a/b is (are) — (Q) 2

(C) In R^2, let $\sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j}, \hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j}$ and $\beta\,\hat{i} + (1 - \beta)\hat{j}$ be the position vectors of X, Y and Z with respect to the origin O, respectively. If the distance of Z from the bisector of the acute angle of $\overrightarrow{OX}$ with $\overrightarrow{OY}$ is $\frac{3}{\sqrt{2}}$, then possible value(s) of $|\beta|$ is (are) — (R) 3

(D) Suppose that $F(\alpha)$ denotes the area of the region bounded by $x = 0, x = 2$ $y^2 = 4x$ and $y = |\alpha x - 1| + |\alpha x - 2| + \alpha x$, where $\alpha \in \{0, 1\}$. Then the value(s) of $F(\alpha) + \frac{8}{3}\sqrt{2}$, when $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$, is (are) — (S) 5

(T) 6

(A) माना कि एक त्रिभुज ΔXYZ में कोणों X, Y और Z के सामने की भुजाओं की लम्बाईयाँ क्रमशः a, b और c है। मानाकि $2(a^2 - b^2) = c^2$ और $\lambda = \frac{\sin(X - Y)}{\sin Z}$ है। यदि $\cos(n\pi\lambda) = 0$ तब n के संभव मान है। — (P) 1

(B) माना कि एक त्रिभुज ΔXYZ मे कोणों X, Y और Z के सामने की भुजाओं की लम्बाईयाँ — (Q) 2

क्रमशः a, b और c है। यदि $1 + \cos 2X - 2\cos 2Y = 2 \sin X \sin Y$ तब a/b के संभव मान है

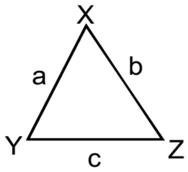
(C) माना कि R^2 में, मूल बिन्दु O के सापेक्ष $\sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j}, \hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j}$ और $\beta\,\hat{i} + (1-\beta)\hat{j}$ क्रमशः X, Y और Z के स्थिति सदिश है। यदि $\overrightarrow{OX}$ और $\overrightarrow{OY}$ के न्यून कोण के समद्विभाजक से Z की दूरी $\frac{3}{\sqrt{2}}$ हो, तो $|\beta|$ का संभव मान है। (R) 3

(D) माना कि $F(\alpha)$ उस क्षेत्र के क्षेत्रफल को दर्शाता है जो $x = 0, x = 2, y^2 = 4x$ और $y = |\alpha x - 1| + |\alpha x - 2| + \alpha x$, से घिरा हुआ है, जहाँ $\alpha \in \{0, 1\}$ है। $\alpha = 0$ और $\alpha = 1$ के लिए $F(\alpha) + \frac{8}{3}\sqrt{2}$ का मान है। (S) 5

(T) 6

Ans. **A -PRS , B -P , C - PQ, D - ST**

Sol. (A)



Give $2(a^2 - b^2) = c^2$

$\Rightarrow \quad 2(\sin^2 x - \sin^2 y) = \sin^2 z$

$\Rightarrow \quad 2\sin(x + y)\sin(x - y) = \sin^2 z$

$\Rightarrow \quad 2\sin(\pi - z)\sin(x - y) = \sin^2 z$

$z \quad \Rightarrow \quad \sin(-y) = \frac{\sin z}{2}$ ....(i)

also given,

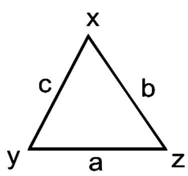
$\lambda = \frac{\sin(x-y)}{\sin z} = \frac{1}{2}$

Now, $\cos(n\pi\lambda) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$

$\therefore \quad n = 1, 3, 5 \qquad \therefore \quad (A \to P, R, S)$

(B)



$1 + \cos 2x - 2\cos 2y = 2\sin x \sin y$

$2\cos^2 x - 2\cos^2 y = 2\sin x \sin y$

$1 - \sin^2 x - 1 + 2\sin^2 y = \sin x \sin y$

$\sin^2 x + \sin x \sin y = 2\sin^2 y$

$\sin(\sin x + \sin y) = 2\sin^2 y \qquad \sin x = ak, \sin y = bk$

$a(a + b) = 2b^2$

$a^2 + ab - 2b^2 = 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-2=0$$

$$\frac{a}{b}=-2,1$$

$$\frac{a}{b}=1 \qquad (B\to P)$$

(C)

Hence equation of acute angle bisector of OX and OY is $y=x$

Hence $x-y=0$

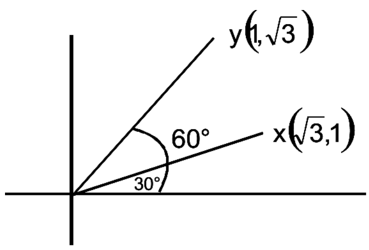
Now, distance of $\beta\hat{i}+(1-\beta)\hat{j}\equiv z(\beta,1-\beta)$ from $x-y$ is $\left|\frac{\beta-(1-\beta)}{\sqrt{2}}\right|=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$|2\beta-1|=3$

$2\beta-1=\pm3$

$\beta=2,-1$

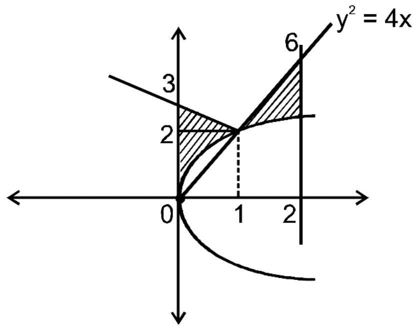
$|\beta|=2,1$ Ans. (P, Q)



(D)

For $\alpha=1$

$$y=|x-1|+|x-2|+x=\begin{cases}3-x & ; \quad x<1\\ 1+x & ; \quad 1\le x<2\\ 3x-3 & ; \quad x\ge 2\end{cases}$$

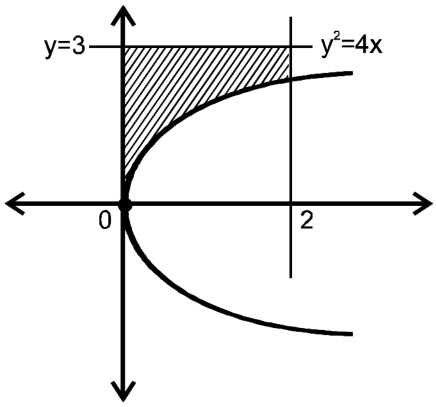


$$A=\frac{1}{2}(2+3)\times1+\frac{1}{2}(2+3)\times1-\int_0^2 2\sqrt{x}\,dx$$

$$A=5-\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad F(1)+\frac{8}{3}\sqrt{2}=5$$

For $\alpha=0$, $y=|-1|+|-2|=3$



$A = 6 - \int_0^2 2\sqrt{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad A = 6 - \frac{8}{3}\sqrt{2}$

$\therefore \quad f(0) + \frac{8}{3}\sqrt{2} = 6 \quad \therefore \quad (D \to s, t)$